

УДК 69.04

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА СИЛ И МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE METHOD OF FORCES  
AND THE METHOD OF DISPLACEMENT**Долгополов В.Е.**

старший преподаватель кафедры ПСКИСМ,  
Кубанский государственный технологический университет  
dolgopolov\_v@icloud.com

**Фотиева В.А.**

студентка 4 курса направления «Строительство»,  
Кубанский государственный технологический университет  
fotievavera@gmail.com

**Сапрыкина В.С.**

студентка 4 курса направления «Строительство»,  
Кубанский государственный технологический университет  
saprykina-vichka@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассматриваются метод сил и метод перемещений при расчёте рам. Показаны примеры решения рамы с двумя неизвестными по двум методам. В заключении проведено сравнение методов на основе примеров.

**Ключевые слова:** метод сил, метод перемещений, эпюры, канонические уравнения, усилия, коэффициенты.

**Dolgopolov V.E.**

Senior Lecturer  
of the Department PSKISM,  
Kuban State Technological University  
dolgopolov\_v@icloud.com

**Fotieva V.A.**

4th year Student  
of the direction «Construction»,  
Kuban State Technological University  
fotievavera@gmail.com

**Saprykina V.S.**

4th year Student  
of the Direction «Construction»,  
Kuban State Technological University  
saprykina-vichka@mail.ru

**Annotation.** The article discusses the method of forces and the method of displacement in the calculation of frames. Examples of solving a frame with two unknowns by two methods are shown. In conclusion, a comparison of methods based on examples is carried out.

**Keywords:** force method, displacement method, plots, canonical equations, forces, coefficients.

**В** строительстве здания и сооружения являются сложными инженерными системами, для упрощения расчетов на практике используются различные схемы, такие как статически неопределимые системы, которые позволяют снизить сложность задачи.

Статически неопределимые системы – это системы, в которых внутренние усилия нельзя определить исключительно из уравнений равновесия, их находят методом сил и методом перемещений.

Расчёт по методу сил состоит в том, что в начале исключаются лишние связи, а за неизвестные принимаются внутренние усилия. Затем их вычисляют из канонических уравнений и после определяют перемещения, усилия, деформации и напряжения системы. При расчёте методом перемещений за неизвестные принимаются перемещения узлов системы. Схожесть этих методов заключается в том, что в обоих случаях выбирают основную систему и находят расчётные усилия  $M$ ,  $Q$  и  $N$  [1].

Рассмотрим вначале метод сил на примере.

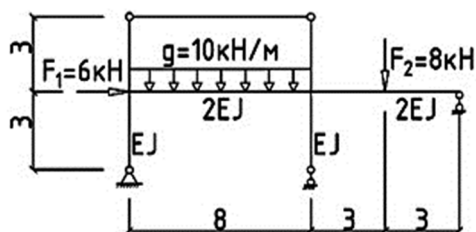


Рисунок 1

1. Для начала определим степень статической неопределённости:

$$n = 3k - ш = 3 \times 3 - 7 = 2.$$

Так как система два раза статически неопределима чтобы ее решить составим и запишем два канонических уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

2. Построим основную систему метода сил (О.С.), отбросив лишние связи. При этом мы должны учитывать, что основная система должна быть геометрически неизменяемой и простой для расчёта [1].

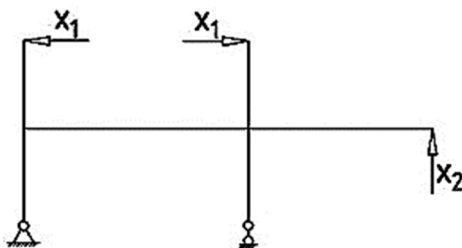


Рисунок 2 – Основная система метода сил

3. К основной системе построим эпюры единичных сил.

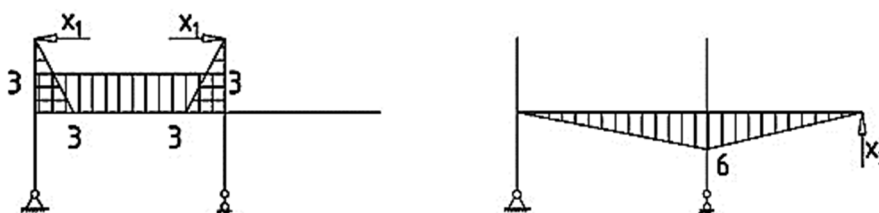


Рисунок 3 – Единичные эпюры  $M_1$  и  $M_2$

И построим грузовую эпюру ( $M_p$ ), для этого загрузим О.С. заданной нагрузкой.

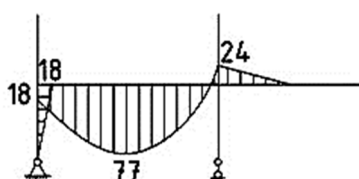


Рисунок 4 – Грузовая эпюра  $M_p$

Поскольку у нас несколько неизвестных строим суммарную эпюру ( $M_s$ ), она понадобится в дальнейшем для деформационной проверки. Чтобы её построить одновременно прикладываем  $x_1$  и  $x_2$  к О.С.

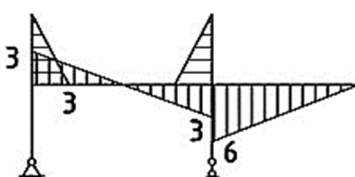


Рисунок 5 – Суммарная эпюра  $M_s$

4. Теперь вычислим неизвестные коэффициенты ( $\delta_{ij}$ ) и свободные члены ( $\Delta_{ip}$ ) канонических уравнений путём перемножения эпюр по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{54}{EJ},$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 6 \right) = \frac{84}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{8}{6} (2 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 6) = \frac{-36}{EJ},$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{4}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 18 - 2 \cdot 77 \cdot 3 - 3 \cdot 77 - 3 \cdot 18) + \frac{4}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 77 + 2 \cdot 24 \cdot 3 - 3 \cdot 77 + 3 \cdot 24) \right) - \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{-604}{EJ},$$

$$\Delta_{2p} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_p dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{4}{6} (2 \cdot 0 \cdot 18 + 2 \cdot 77 \cdot 3 + 0 \cdot 77 + 3 \cdot 18) + \frac{4}{6} (2 \cdot 3 \cdot 77 - 2 \cdot 24 \cdot 6 + 6 \cdot 77 - 3 \cdot 24) + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 1,5 + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 4,5 + \frac{3}{6} (-2 \cdot 24 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 6 - 3 \cdot 24) \right) = \frac{430}{EJ}.$$

Проверим полученные грузовые и единичные перемещения:

$$\delta_{ss} = \sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} = 84 + 54 - 36 - 36 = \frac{66}{EJ},$$

$$\delta_{ss} = \int_0^l \frac{M_s M_s dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \frac{66}{EJ},$$

$$\Delta_{sp} = \sum \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -604 + 430 = \frac{-174}{EJ},$$

$$\Delta_{sp} = \int_0^l \frac{M_s M_p dx}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{4}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 18 + 2 \cdot 77 \cdot 0 - 3 \cdot 77 + 0 \cdot 18) + \frac{4}{6} (2 \cdot 0 \cdot 77 - 2 \cdot 24 \cdot 3 + 3 \cdot 77 - 0 \cdot 24) \right) - \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 1,5 + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 1,5 + \frac{3}{6} (-2 \cdot 24 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 6 - 3 \cdot 24) = \frac{-174}{EJ}.$$

5. Подставим значения в канонические уравнения и найдём неизвестные:

$$\begin{cases} 54x_1 - 36x_2 - 604 = 0 \\ -36x_1 + 84x_2 + 430 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 10,8;$$

$$x_2 = -0,46.$$

Строим единичные эпюры изгибающих моментов с учётом найденных коэффициентов.

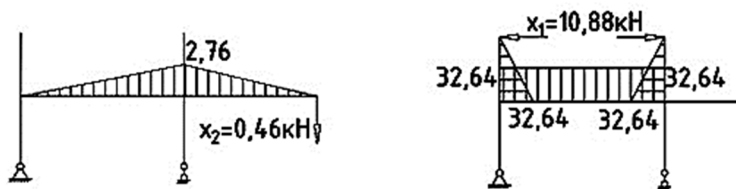


Рисунок 6 – Эпюры  $\bar{M}_{1x_1}$  и  $\bar{M}_{2x_2}$

Строим окончательную эпюру моментов:

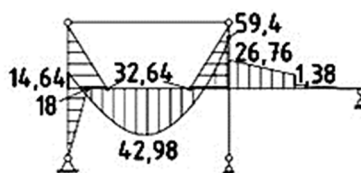


Рисунок 7 – Эпюра моментов  $M_{ок}$

6. Проведём кинематическую проверку эюры моментов  $M_{ок}$

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_s M_{ок} dx}{EJ} = = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 32,64 \cdot 2 + + \frac{1}{2EJ} \left( \frac{4}{6} (2 \cdot 3 \cdot 14,69 + 2 \cdot 42,98 \cdot 0 - 3 \cdot 42,98 + 14,69 \cdot 0) + + \frac{4}{6} (2 \cdot 0 \cdot 42,98 - 2 \cdot 59,4 \cdot 3 + 3 \cdot 42,98 + 59,4 \cdot 0) - \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 1,5 + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 1,5 + \frac{3}{6} (-2 \cdot 26,76 \cdot 6 - 2 \cdot 1,38 \cdot 3 - 1,38 \cdot 6 - 3 \cdot 26,76) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,38 \right) = 0.$$

7. Строим эюры поперечных и продольных сил.

Эюру поперечных сил  $Q$  строим по построенной эюре изгибающих моментов  $M$ , определяя концевые поперечные силы из условий равновесия каждого стержня отдельно.

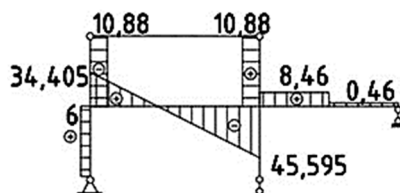


Рисунок 8 – Эюра поперечных сил  $Q$

Для построения эюры продольных сил  $N$  вырежем узлы рамы, на них покажем поперечные силы с эюры  $Q$  и продольными силами уравновесим узлы.

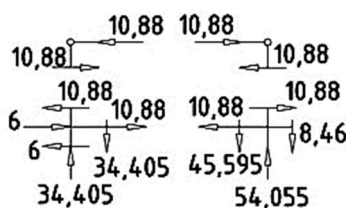


Рисунок 9

Строим эюру  $N$ :

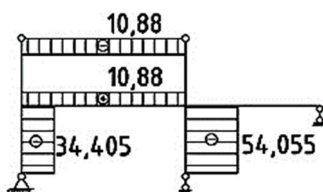


Рисунок 10 – Эюра продольных сил  $N$

8. Завершающим этапом проведём статическую проверку рамы. Покажем значения опорных реакций с построенных эюр на заданной схеме рамы и проверим по уравнениям статики.

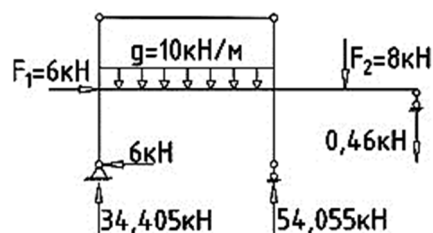


Рисунок 11

$$\sum x = 0,$$

$$F_1 - H = 6 - 6 = 0,$$

$$\sum y = 0,$$

$$34,405 + 54,055 - 0,46 - F_2 - q \cdot 8 = 34,405 + 54,055 - 0,46 - 8 - 10 \cdot 8 = 0.$$

Так как все проверки сошлись – задача решена верно.

Теперь рассмотрим метод перемещений.

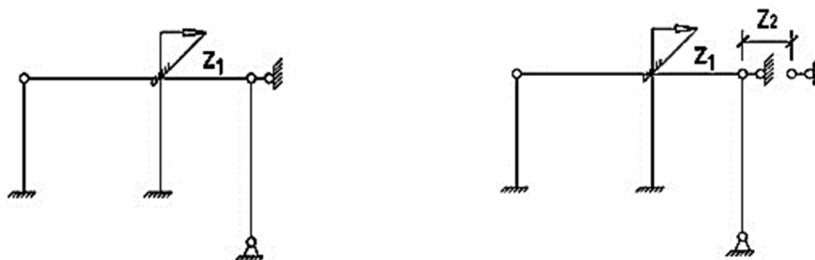


Рисунок 12

1. Определим степень кинематической неопределимости.

$$N = n_y + n_n = 1 + 1 = 2.$$

где  $n_y$  – количество угловых перемещений или количество жёстких узлов;  $n_n$  – количество линейных перемещений.

2. Построим основную систему метода перемещений.

Чтобы избавиться от угловых перемещений на жёстких узлах, показываем жёсткие плавающие заделки и угловое перемещение по часовой стрелке  $z_1$ . А от линейного перемещения справа или слева поставить шарнирную опору. Линейное перемещение показывается вектором  $z_2$ .

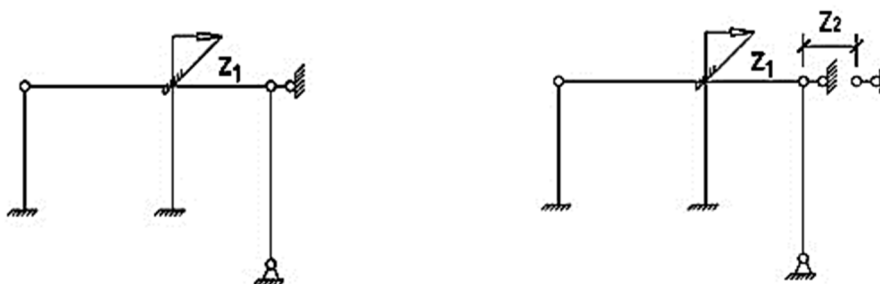


Рисунок 13

3. Запишем систему канонических уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} r_{11} * z_1 + r_{12} * z_2 + R_{1F} = 0 \\ r_{21} * z_1 + r_{22} * z_2 + R_{2F} = 0 \end{cases}$$

4. Чтобы определить коэффициенты и свободные члены канонического уравнения, нужно построим единичные и грузовую эпюры.

Определим жёсткости стержней:

$$i_1 = \frac{1EJ}{2} = 0,5,$$

$$i_2 = \frac{3EJ}{6} = 0,5,$$

$$i_3 = \frac{3EJ}{4} = 0,75,$$

$$i_4 = \frac{1EJ}{5} = 0,2,$$

$$i_5 = \frac{2EJ}{5} = 0,4,$$

$$i_6 = \frac{1EJ}{7} = 0,14.$$

Эпюра  $M_1$  строится от  $z_1 = 1$ . При угловом перемещении деформации будут подвергнуты те стержни, которые примыкают к поворачиваемой жёсткой плавающей заделке:

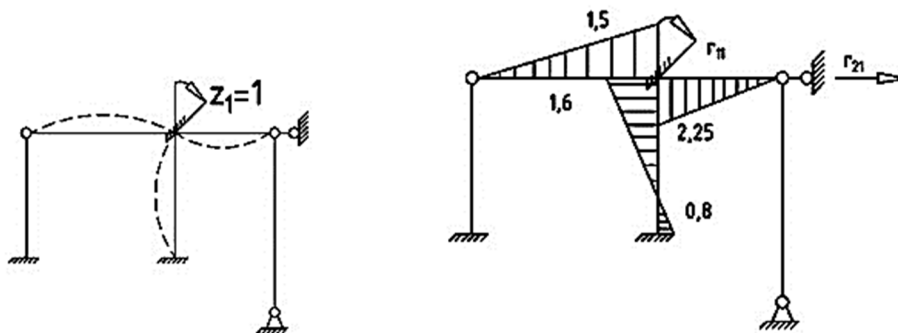


Рисунок 14 – Единичная эпюра  $M_1$

$M_2$  строится от  $z_2=1$ . Смещается весь стержень с опорами.

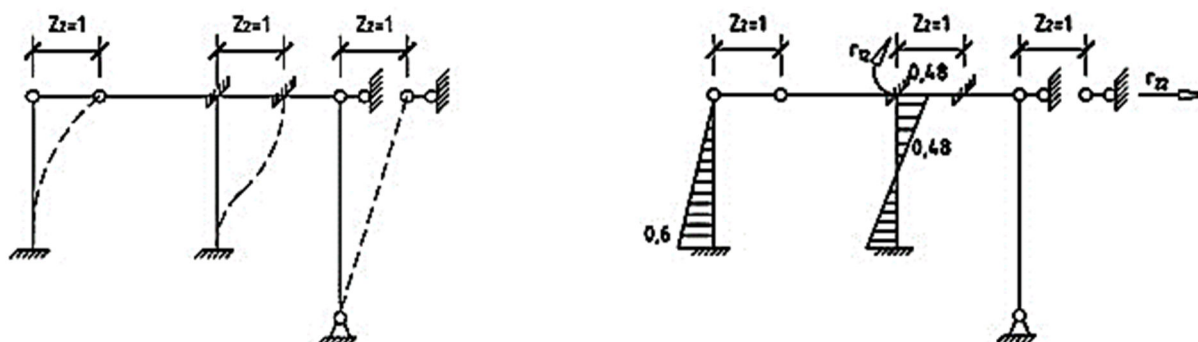


Рисунок 15 – Единичная эпюра  $M_2$

Строим грузовую эпюру:

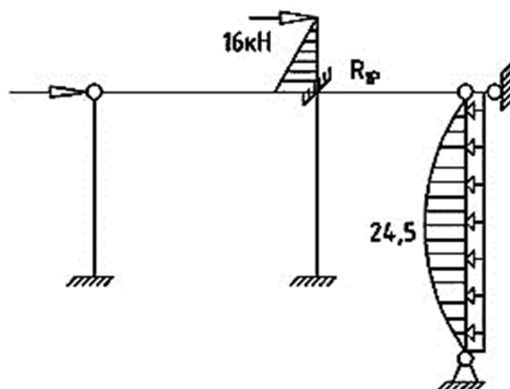
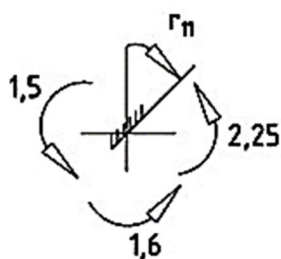
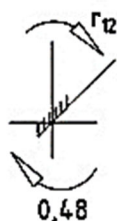


Рисунок 16 – Грузовая эпюра  $M_p$

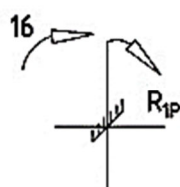
5. Вычислим неизвестные коэффициенты методом вырезания узлов:



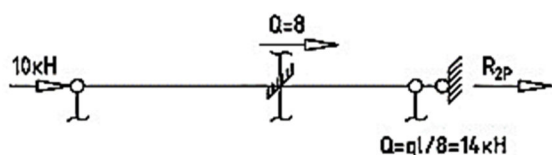
$$\begin{aligned} \sum M &= 0, \\ r_{11} - 2,25 - 1,6 - 1,5 &= 0, \\ r_{11} &= 5,35. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M &= 0, \\ r_{12} &= -0,48 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ 16 + R_{1P} &= 0, \\ R_{1P} &= -16 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ 10 + 8 - 14 + R_{2P} &= 0, \\ R_{2P} &= 4 \end{aligned}$$

Система канонических уравнений в численном виде:

$$\begin{cases} 5,35 * Z_1 - 0,48 * Z_2 - 16 = 0 \\ -0,48 * Z_1 + 0,216 * Z_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и найдём неизвестные.

$$z_1 = 3,7,$$

$$z_2 = 8,3.$$

Далее расчёт производится аналогично методу сил.

Рассмотрев оба примера, сравним их.

В методе сил и в методе перемещений можно выделить одинаковые этапы:

1. Нахождение количества неизвестных. Определение степени кинематической неопределимости и статической неопределимости в обоих методах одинаково по трудоёмкости.

2. Использование основной системы. В методе перемещений О.С. принимают введением дополнительных связей, что делает конструкцию кинематически определенной, в методе сил О.С. формируют путём удаления лишних связей.

3. Канонические уравнения в обоих методах одинаковые по структуре.

4. Построение единичных и грузовых эпюр внутренних усилий.

5. Свободные члены и коэффициенты уравнений. В методе сил для их нахождения нужно будет перемножить эпюры, поэтому метод перемещений в этом случае проще.

6. Построение окончательных эпюр внутренних усилий одинаково в обоих методах [1, 2].

При расчёте задачи с равным количеством неизвестных лучше выбрать метод перемещений, однако если система содержит криволинейные или нестандартные элементы, которые не рассмотрены в таблице, то расчёт лучше вести по методу сил, так как усложнится построение эпюр в основной системе.

Следовательно, выбор метода для расчёта определяется пригодностью его к той или иной стержневой системе и числом основных неизвестных.

### Литература

1. Шакирзянов Р.А. Курс лекций по строительной механике / Р.А. Шакирзянов Ф.Р. Шакирзянов. – 2-е изд. – Казань : Казанский гос. архитектурно-строит. ун-т, 2014. – 144 с.
2. Дарков А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М. : Высшая школа, 1986. – 607 с.

### References

1. Shakirzyanov R.A. Course of lectures on structural mechanics / R.A. Shakirzyanov, F.R. Shakirzyanov. – 2nd ed. – Kazan : Kazan State University of Architecture and Construction. un-t, 2014 – 144 p.
2. Darkov A.V. Construction mechanics / A.V. Darkov, N.N. Shaposhnikov. – 8th ed. – M. : High School, 1986. – 607 с.