

УДК 62

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХМАССОВОЙ
УПРУГОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ДВУМЯ ПАРАМИ КРАТНЫХ КОРНЕЙ**



**STUDY OF THE TRANSIENT CHARACTERISTICS OF A TWO-MASS ELASTIC
ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH TWO PAIRS OF MULTIPLE ROOTS**

Добробаба Юрий Петрович

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры
электроснабжения промышленных предприятий,
Кубанский государственный технологический университет

Печёнкин Олег Андреевич

студент,
Кубанский государственный технологический университет
pchn257@mail.ru

Шефер Сергей Сергеевич

студент,
Кубанский государственный технологический университет

Аннотация. В данной статье определены параметры двухмассовой упругой электромеханической системы, при которых её передаточная функция имеет две пары кратных корней характеристического уравнения. Двухмассовая упругая электромеханическая система с двумя парами кратных корней характеристического уравнения обеспечивает близкое к предельному быстродействию переходных процессов без перерегулирования [1].

Ключевые слова: двигатель постоянного тока, система четвертого порядка, передаточная функция, упругий валопровод.

Dobrobaba Yury Petrovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of department
of power supply industrial enterprises
Kuban state technological university

Pechonkin Oleg Andreevich

Student,
Kuban state technological university
pchn257@mail.ru

Shefer Sergey Sergeevich

Student,
Kuban state technological university.

Annotation. In this article, the parameters of a DC electric drive of a two-mass system with an elastic shaft line corresponding to a transfer function with a fourfold root of the characteristic equation are determined. a two-mass elastic electromechanical system with a sixfold root of the characteristic equation provides close to the maximum speed of transients without overshoot [1].

Keywords: DC motor, fourth order system, transfer function, elastic shaft line.

Передаточная функция для двухмассовой упругой электромеханической системы имеет вид:

$$\frac{\omega_2(p)}{U(p)} = \frac{1}{C_\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{L_\sigma J_1 J_2}{c_\sigma c_M c_\gamma} p^4 + \frac{R_\sigma J_1 J_2}{c_\sigma c_M c_\gamma} p^3 + \left[\frac{L_\sigma (J_1 + J_2)}{c_\sigma c_M} + \frac{J_2}{c_\gamma} \right] p^2 + \frac{R_\sigma (J_1 + J_2)}{c_\sigma c_M} p + 1}, \quad (1)$$

Передаточная функция системы четвертого порядка с двумя парами кратных корней характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{\omega\Omega}(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^2 (T_2 p + 1)^2}, \quad (2)$$

где T_1, T_2 – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции четвертого порядка.

Для упрощения расчетов примем $T_2 = \alpha T_1$, тогда приравняв (1) и (2), получим систему уравнений (3–6):

$$\frac{L_\sigma J_1 J_2}{c_\sigma c_M c_\gamma} = \alpha^2 T_1^4; \quad (3)$$

$$\frac{R_\sigma J_1 J_2}{c_\sigma c_M c_\gamma} = 2\alpha \cdot (1 + \alpha) \cdot T_1^3; \quad (4)$$

$$\frac{L_{\pi}(J_1 + J_2)}{C_{\pi}C_M} + \frac{J_2}{C_y} = (1 + 4\alpha + \alpha^2) \cdot T_1^2; \quad (5)$$

$$\frac{R_{\pi}(J_1 + J_2)}{C_{\pi}C_M} = 2 \cdot (1 + \alpha) \cdot T_1. \quad (6)$$

Так как число неизвестных больше числа независимых уравнений системы, то решение такой системы уравнений не может быть найдено аналитически.

Из уравнений (3) и (4) получим:

$$\frac{L_{\pi}}{R_{\pi}} = \frac{\alpha}{2 \cdot (1 + \alpha)} T_1. \quad (7)$$

Из уравнений (5), (6) и (7) получим:

$$\frac{J_2}{C_y} = (1 + 3\alpha + \alpha^2) \cdot T_1^2. \quad (8)$$

Из уравнений (4) и (8) получим:

$$\frac{R_{\pi}J_1}{C_{\pi}C_M} = \frac{2\alpha \cdot (1 + \alpha)}{1 + 3\alpha + \alpha^2} T_1. \quad (9)$$

Из уравнений (6) и (9) получим:

$$\frac{R_{\pi}J_2}{C_{\pi}C_M} = \frac{2 \cdot (1 + \alpha)^3}{1 + 3\alpha + \alpha^2} T_1. \quad (10)$$

Из уравнений (9) и (10) получим:

$$J_1 = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} J_2. \quad (11)$$

Из уравнения (10) получим:

$$T_1 = \frac{1 + 3\alpha + \alpha^2}{2 \cdot (1 + \alpha)^3} \cdot \frac{R_{\pi}J_2}{C_{\pi}C_M}. \quad (12)$$

Из уравнений (7) и (12) получим:

$$L_{\pi} = \frac{\alpha \cdot (1 + 3\alpha + \alpha^2)}{4 \cdot (1 + \alpha)^4} \cdot \frac{R_{\pi}^2 J_2}{C_{\pi}C_M}.$$

Из уравнений (17) и (21) получим:

$$C_y = \frac{4 \cdot (1 + \alpha)^6}{(1 + 3\alpha + \alpha^2)^3} \cdot \frac{C_{\pi}^2 C_M^2}{R_{\pi}^2 J_2}.$$

Электромеханическая постоянная времени равна:

$$T_M = \frac{R_{\pi}(J_1 + J_2)}{C_{\pi}C_M}.$$

Электрическая постоянная времени равна:

$$T_{\pi} = \frac{L_{\pi}}{R_{\pi}};$$

Результирующий момент инерции равен:

$$J = J_1 + J_2.$$

Переходная характеристика системы четвертого порядка с двумя парами кратных корней имеет вид:

$$h_{40}(t) = -\frac{T_1^2(T_1 - 3T_2)}{(T_1 - T_2)^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2^2(3T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Рассмотрим трехмассовую упругую электромеханическую систему с параметрами $C_B = 1,25 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$, $C_M = 1,25 \text{ В}\cdot\text{с}$, $R_n = 5 \text{ Ом}$, $J_2 = 0,08 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Определим варьируемые параметры двухмассовой упругой электромеханической системы, при которых её передаточная функция имеет две пары кратных корней характеристического уравнения.

Если $\alpha = 1$, то

$$J_1 = 0,02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,08 \text{ с}; T_2 = 0,08 \text{ с}; L_n = 0,1 \text{ Гн}; C_y = 2,5 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}};$$

$$T_n = 0,32 \text{ с}; T_n = 0,02 \text{ с}; J = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,9$, то

$$J_1 = 0,019944598 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,084163872 \text{ с}; T_2 = 0,075747485 \text{ с};$$

$$L_n = 0,099667743 \text{ Гн}; C_y = 2,504159733 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,319822713 \text{ с};$$

$$T_n = 0,019933548 \text{ с}; J = 0,099944598 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,8$ то

$$J_1 = 0,019753086 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,08866941 \text{ с}; T_2 = 0,070935528 \text{ с};$$

$$L_n = 0,098521566 \text{ Гн}; C_y = 2,518610346 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,319209875 \text{ с};$$

$$T_n = 0,019704313 \text{ с}; J = 0,099753086 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,7$ то

$$J_1 = 0,019377162 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,093531447 \text{ с}; T_2 = 0,065472012 \text{ с};$$

$$L_n = 0,096282372 \text{ Гн}; C_y = 2,54730079 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,318006918 \text{ с};$$

$$T_n = 0,019256474 \text{ с}; J = 0,099377162 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,6$ то

$$J_1 = 0,01875 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,09875 \text{ с}; T_2 = 0,05925 \text{ с};$$

$$L_n = 0,092578125 \text{ Гн}; C_y = 2,59614351 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,316 \text{ с};$$

$$T_n = 0,018515625 \text{ с}; J = 0,09875 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,5$ то

$$J_1 = 0,017777777 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,104296296 \text{ с}; T_2 = 0,052148148 \text{ с};$$

$$L_n = 0,08691358 \text{ Гн}; C_y = 2,674357861 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,312888888 \text{ с};$$

$$T_n = 0,017382716 \text{ с}; J = 0,097777777 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,4$ то

$$J_1 = 0,01632653 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,110087463 \text{ с}; T_2 = 0,044034985 \text{ с};$$

$$L_n = 0,078633902 \text{ Гн}; C_y = 2,797063029 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,308244896 \text{ с};$$

$$T_n = 0,01572678 \text{ с}; J = 0,09632653 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,3$ то

$$J_1 = 0,014201183 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; T_1 = 0,115939918 \text{ с}; T_2 = 0,034781975 \text{ с};$$

$$L_n = 0,066888414 \text{ Гн}; C_y = 2,990686789 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}}; T_n = 0,301443785 \text{ с};$$

$$T_n = 0,013377682 \text{ с}; J = 0,094201183 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,2$ то

$$J_1 = 0,0111111111 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,121481481 \text{ с}; T_2 = 0,024296296 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,050617283 \text{ Гн}; C_y = 3,305414895 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,291555555 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,010123456 \text{ с}; J = 0,098888888 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 0,1$ то

$$J_1 = 6,611570248 \cdot 10^{(-3)} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,125980465 \text{ с}; T_2 = 0,012598046 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,028631924 \text{ Гн}; C_y = 3,847798063 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,277157024 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 5,72638481 \cdot 10^{-3} \text{ с}; J = 0,08661157 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,1$ то

$$J_1 = 0,019954648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,076155922 \text{ с}; T_2 = 0,083771514 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,099727993 \text{ Гн}; C_y = 2,503404448 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,319854873 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,019945598 \text{ с}; J = 0,099954648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,2$ то

$$J_1 = 0,01983471 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,072607062 \text{ с}; T_2 = 0,087128474 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,09900963 \text{ Гн}; C_y = 2,512437788 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,319471072 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,019801926 \text{ с}; J = 0,09983471 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,3$ то

$$J_1 = 0,019659735 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,069328511 \text{ с}; T_2 = 0,090127065 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,097964201 \text{ Гн}; C_y = 2,525694509 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,318911152 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,01959284 \text{ с}; J = 0,099659735 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,4$ то

$$J_1 = 0,019444444 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,066296296 \text{ с}; T_2 = 0,092814814 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,096682098 \text{ Гн}; C_y = 2,542133952 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,31822222 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,019336419 \text{ с}; J = 0,099444444 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,5$ то

$$J_1 = 0,0192 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,063488 \text{ с}; T_2 = 0,095232 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,095232 \text{ Гн}; C_y = 2,560972955 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,31744 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,0190464 \text{ с}; J = 0,0992 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,6$ то

$$J_1 = 0,018934911 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,060883022 \text{ с}; T_2 = 0,097412835 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,093666188 \text{ Гн}; C_y = 2,581613974 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,316591715 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,018733237 \text{ с}; J = 0,098934911 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,7$ то

$$J_1 = 0,018655692 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,058462632 \text{ с}; T_2 = 0,099386475 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,092024514 \text{ Гн}; C_y = 2,603595771 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{н}} = 0,315698214 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,018404902 \text{ с}; J = 0,098655692 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,8$ то

$$J_1 = 0,018367346 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,056209912 \text{ с}; T_2 = 0,101177842 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,090337359 \text{ Гн}; C_y = 2,626558839 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{м}} = 0,314775507 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,018067471 \text{ с}; J = 0,098367346 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 1,9$ то

$$J_1 = 0,018073721 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,054109639 \text{ с}; T_2 = 0,102808315 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,088627857 \text{ Гн}; C_y = 2,650220684 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{м}} = 0,313835907 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,017725571 \text{ с}; J = 0,098073721 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Если $\alpha = 2$, то

$$J_1 = 0,017777777 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; T_1 = 0,052148148 \text{ с}; T_2 = 0,104296296 \text{ с};$$

$$L_{\text{н}} = 0,08691358 \text{ Гн}; C_y = 2,674357861 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}; T_{\text{м}} = 0,312888888 \text{ с};$$

$$T_{\text{н}} = 0,017382716 \text{ с}; J = 0,097777777 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

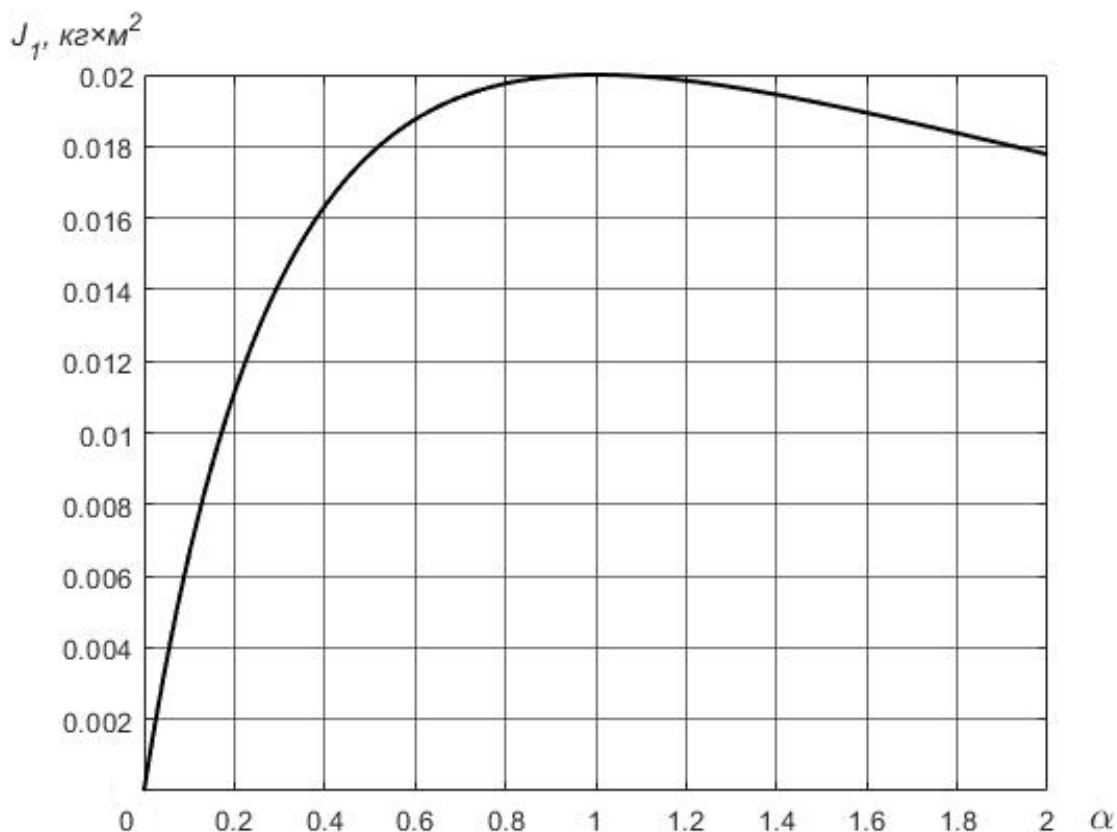


Рисунок 1 – Момент инерции двигателя двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения

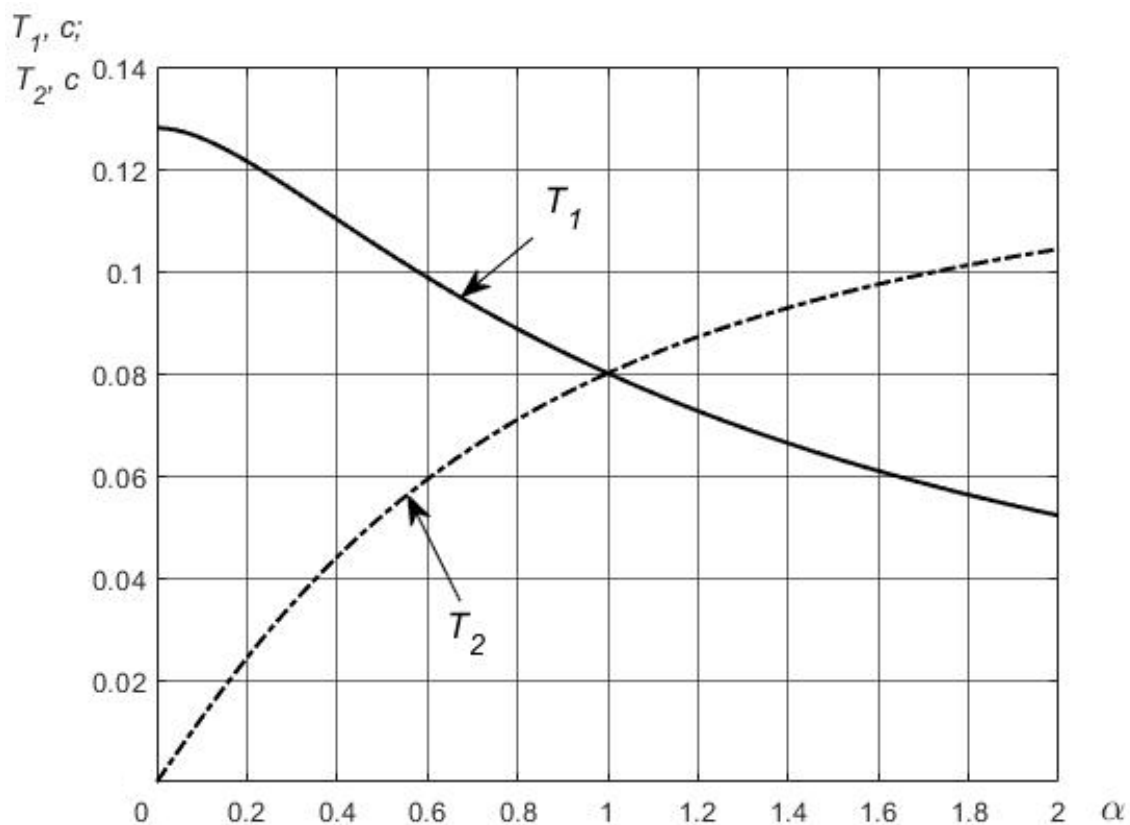


Рисунок 2 – Зависимости постоянных времени двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения

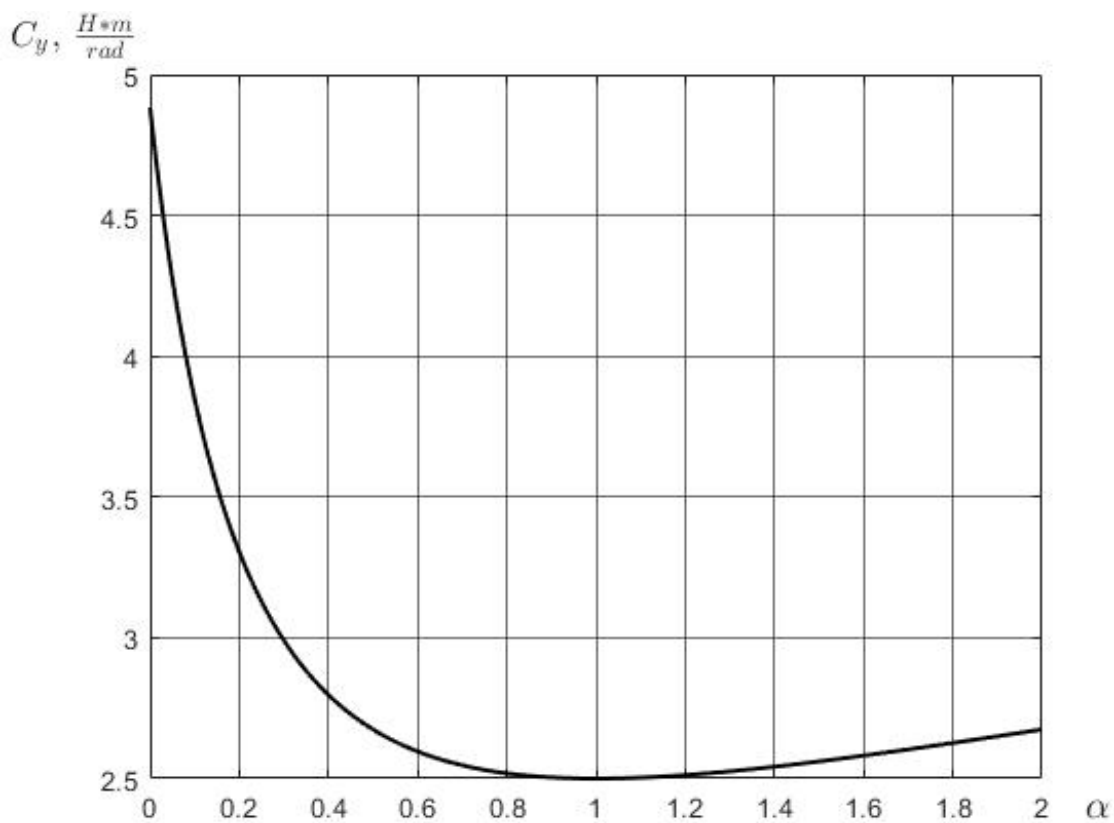


Рисунок 3 – Коэффициент упругости двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения

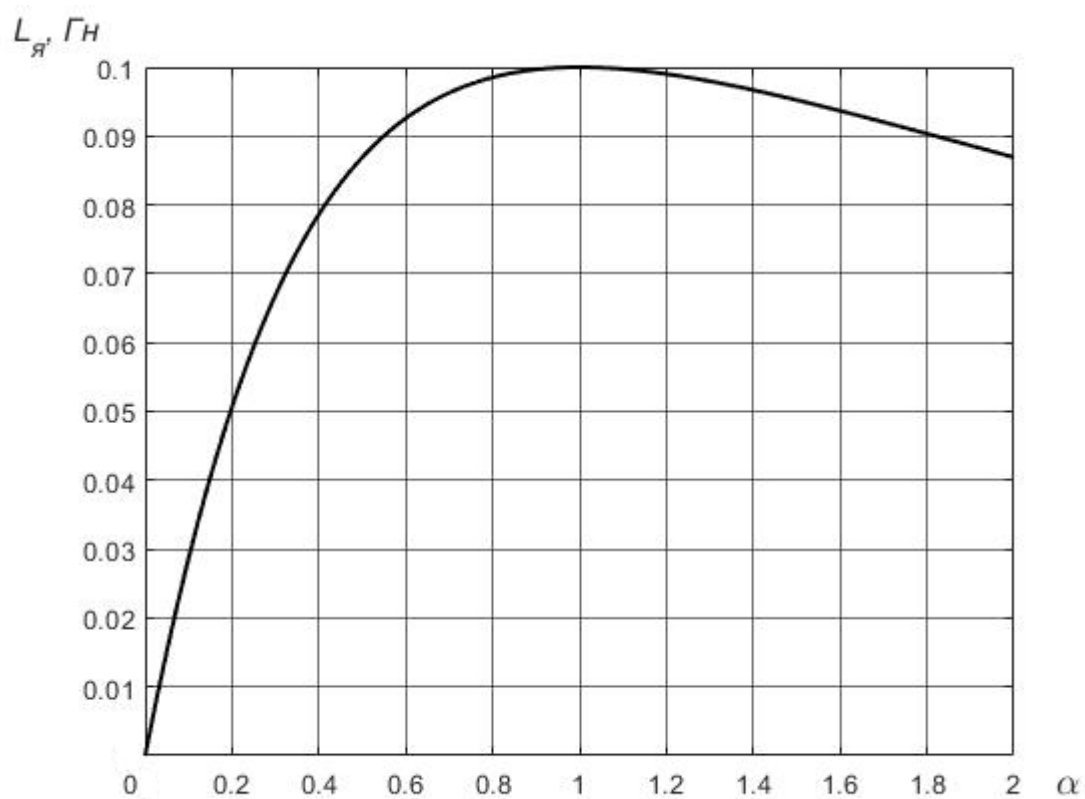


Рисунок 4 – Индуктивность якорной цепи двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения

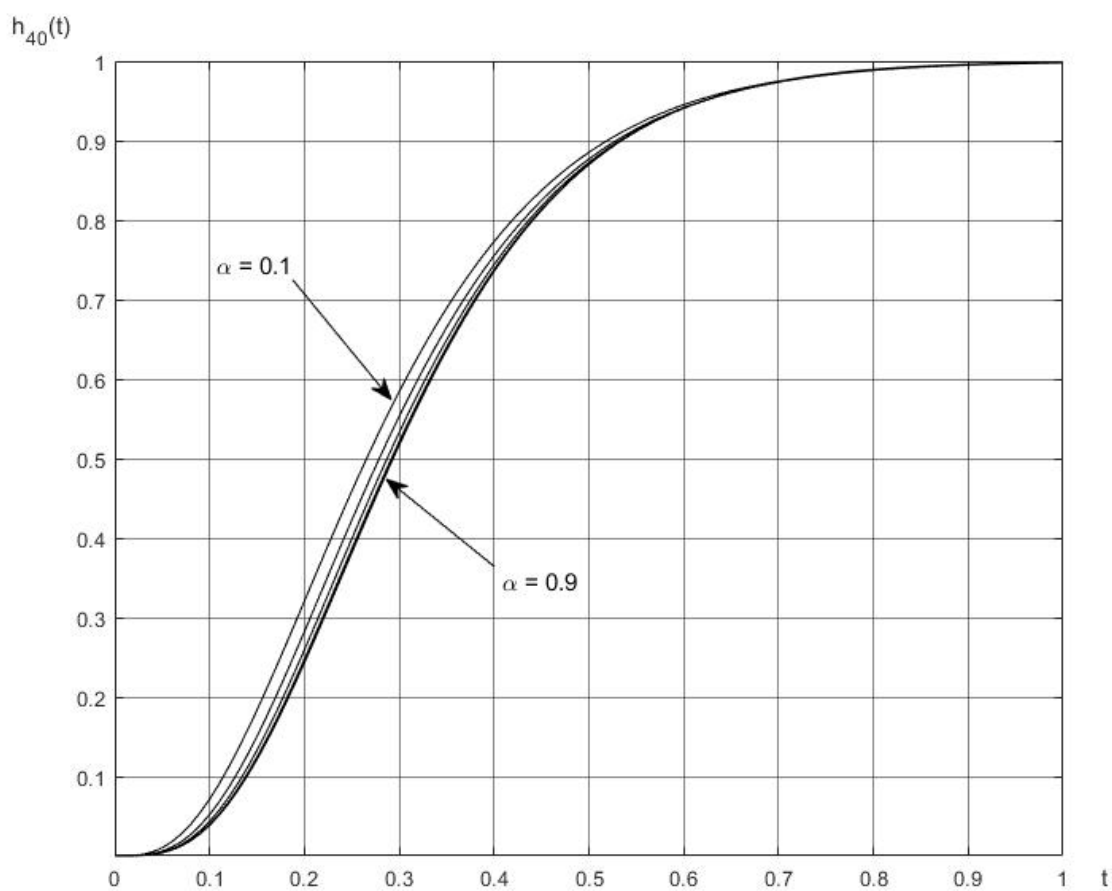


Рисунок 5 – Семейство переходных характеристик двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения для $T_1 > T_2$

Вывод: Определены параметры двухмассовой упругой электромеханической системы соответствующие передаточной функции с двумя парами кратных корней характеристического уравнения. Определена переходная характеристика двухмассовой упругой электромеханической системы с двумя парами кратных корней характеристического уравнения.

Литература

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1. – С. 417–422.
2. Добробаба Ю.П., Асланова Д.А., Печёнкин О.А. Двухмассовая упругая электромеханическая система с двумя парами кратных корней характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2022. – № 1. – С. 64–67.

References

1. Dobrobaba Yu.P., Murlin A.G., Serkin A.D. The analysis of transitional features of the system of the fourth order with multiple roots of the characteristic equation // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 1. – P. 417–422.
2. Dobrobaba Yu.P., Aslanova D.A., Pechonkin O.A. Two-mass elastic electromechanical system with two pairs of multiple roots characteristic equation // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2022. – № 1. – P. 64–67.