

УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ПЯТЬЮ КОРНЯМИ КРАТНОСТЬЮ ОДИН ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ



ANALYSIS OF TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF THE FIFTH ORDER SYSTEM WITH FIVE ROOTS WITH MULTIPLE ONE OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлина Владислава Анатольевна

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры
информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Чувиллин Никита Александрович

студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Аннотация. Определены переходные характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции. Доказано, что переходные характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени не имеют перерегулирование при условии: постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы пятого порядка, корни характеристического уравнения.

Dobrobaba Yury Petrovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of Department
of Power Supply Industrial Enterprises,
Kuban State Technological University

Murlina Vladislava Anatolievna

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Information Systems and Programming,
Kuban State Technological University

Chuvilin Nikita Aleksandrovich

Student,
Kuban State Technological University

Annotation. Transient characteristics of a fifth-order system with five roots of multiplicity one of the characteristic equation with a zero-degree polynomial and a first-degree polynomial of the numerator of the transfer function are determined. It is proved that the transient characteristics of a fifth-order system with five roots of the multiplicity of the characteristic equation with a first-degree polynomial do not have overshoot, provided that the time constant of the numerator of the fifth-order transfer function is less than or equal to the greater time constant of the denominator of the transfer function.

Keywords: transient response, characteristic equation of the fifth order system, roots of the characteristic equation.

В статье [1] выполнен анализ переходных характеристик систем пятого порядка с пятью кратными корнями характеристического уравнения.

В данной работе анализируются переходные характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения.

Передаточная функция систем пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения:

$$W_{50}(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1) \cdot (T_4 p + 1) \cdot (T_5 p + 1)},$$

где $T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq T_4 \neq T_5$ – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции пятого порядка.

Корни характеристического уравнения системы с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения:

$$P_1 = -\frac{1}{T_1}; P_2 = -\frac{1}{T_2}; P_3 = -\frac{1}{T_3}; P_4 = -\frac{1}{T_4}; P_5 = -\frac{1}{T_5}.$$

Переходная характеристика системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + K_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + K_4 \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} + K_5 \cdot e^{-\frac{t}{T_5}} + K_6.$$

Первая, вторая, третья и четвертая производные переходной характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения имеют вид:

$$h_{50}^{(1)}(t) = -\frac{K_1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_2}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{K_3}{T_3} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{K_4}{T_4} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} - \frac{K_5}{T_5} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}};$$

$$h_{50}^{(2)}(t) = \frac{K_1}{T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_2}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{K_3}{T_3^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{K_4}{T_4^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} + \frac{K_5}{T_5^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}};$$

$$h_{50}^{(3)}(t) = -\frac{K_1}{T_1^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_2}{T_2^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{K_3}{T_3^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{K_4}{T_4^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} - \frac{K_5}{T_5^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}};$$

$$h_{50}^{(4)}(t) = \frac{K_1}{T_1^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_2}{T_2^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{K_3}{T_3^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{K_4}{T_4^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} + \frac{K_5}{T_5^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}}.$$

Так как начальные и конечные значения системы пятого порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = 0; \\ h_{50}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(3)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(4)}(0) = 0; \\ h_{50}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечные значения системы пятого порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6; \\ h_{50}^{(1)}(0) = -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} - \frac{K_3}{T_3} - \frac{K_4}{T_4} - \frac{K_5}{T_5}; \\ h_{50}^{(2)}(0) = \frac{K_1}{T_1^2} + \frac{K_2}{T_2^2} + \frac{K_3}{T_3^2} + \frac{K_4}{T_4^2} + \frac{K_5}{T_5^2}; \\ h_{50}^{(3)}(0) = -\frac{K_1}{T_1^3} - \frac{K_2}{T_2^3} - \frac{K_3}{T_3^3} - \frac{K_4}{T_4^3} - \frac{K_5}{T_5^3}; \\ h_{50}^{(4)}(0) = \frac{K_1}{T_1^4} + \frac{K_2}{T_2^4} + \frac{K_3}{T_3^4} + \frac{K_4}{T_4^4} + \frac{K_5}{T_5^4}; \\ h_{50}(\infty) = K_6, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$$\begin{cases} K_6 = 1; \\ K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + 1 = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} - \frac{K_3}{T_3} - \frac{K_4}{T_4} - \frac{K_5}{T_5} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^2} + \frac{K_2}{T_2^2} + \frac{K_3}{T_3^2} + \frac{K_4}{T_4^2} + \frac{K_5}{T_5^2} = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1^3} - \frac{K_2}{T_2^3} - \frac{K_3}{T_3^3} - \frac{K_4}{T_4^3} - \frac{K_5}{T_5^3} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^4} + \frac{K_2}{T_2^4} + \frac{K_3}{T_3^4} + \frac{K_4}{T_4^4} + \frac{K_5}{T_5^4} = 0. \end{cases}$$

$$[T_1^4 - T_1^3 \cdot (T_2 + T_3 + T_4 + T_5) + T_1^2 \cdot (T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_2 T_5 + T_3 T_4 + T_3 T_5 + T_4 T_5) - T_1 \cdot (T_2 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_5 + T_2 T_4 T_5 + T_3 T_4 T_5) + T_2 T_3 T_4 T_5] \cdot K_1 = -T_1^4.$$

Так как

$$(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5) = [T_1^2 - T_1 \cdot (T_2 + T_3) + T_2 T_3] \cdot [T_1^2 - T_1 \cdot (T_4 + T_5) + T_4 T_5] = T_1^4 - T_1^3 \cdot (T_2 + T_3) + T_1^2 T_2 T_3 - T_1^3 \cdot (T_4 + T_5) + T_1^2 \cdot (T_2 + T_3) \times (T_4 + T_5) - T_1 T_2 T_3 \cdot (T_4 + T_5) + T_1^2 T_4 T_5 - T_1 T_4 T_5 \cdot (T_2 + T_3) + T_2 T_3 T_4 T_5 = T_1^4 - T_1^3 \cdot (T_2 + T_3 + T_4 + T_5) + T_1^2 \cdot (T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_2 T_5 + T_3 T_4 + T_3 T_5 + T_4 T_5) - T_1 \cdot (T_2 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_5 + T_2 T_4 T_5 + T_3 T_4 T_5) + T_2 T_3 T_4 T_5,$$

то

$$(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5) \cdot K_1 = -T_1^4.$$

Коэффициенты переходной характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения имеют вид:

$$K_1 = -\frac{T_1^4}{(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5)};$$

$$K_2 = \frac{T_2^4}{(T_1 - T_2) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_2 - T_5)};$$

$$K_3 = -\frac{T_3^4}{(T_1 - T_3) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_3 - T_5)};$$

$$K_4 = \frac{T_4^4}{(T_1 - T_4) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_4 - T_5)};$$

$$K_5 = -\frac{T_5^4}{(T_1 - T_5) \cdot (T_2 - T_5) \cdot (T_3 - T_5) \cdot (T_4 - T_5)}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{50}(t) = -\frac{T_1^4}{(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^4}{(T_1 - T_2) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_2 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_3^4}{(T_1 - T_3) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_3 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4^4}{(T_1 - T_4) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} - \frac{T_5^4}{(T_1 - T_5) \cdot (T_2 - T_5) \cdot (T_3 - T_5) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}} + 1;$$

$$h_{50}^{(1)}(t) = \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2^3}{(T_1 - T_2) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_2 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{T_3^3}{(T_1 - T_3) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_3 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{T_4^3}{(T_1 - T_4) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} + \frac{T_5^3}{(T_1 - T_5) \cdot (T_2 - T_5) \cdot (T_3 - T_5) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}}.$$

Передаточная функция системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{51}(p) = \frac{\tau p + 1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1) \cdot (T_4 p + 1) \cdot (T_5 p + 1)},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка.

Переходная характеристика системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{51}(t) = -\frac{T_1^3 \cdot (T_1 - \tau)}{(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3) \cdot (T_1 - T_4) \cdot (T_1 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} +$$

$$+ \frac{T_2^3 \cdot (T_2 - \tau)}{(T_1 - T_2) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_2 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_3^3 \cdot (T_3 - \tau)}{(T_1 - T_3) \cdot (T_2 - T_3) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_3 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} +$$

$$+ \frac{T_4^3 \cdot (T_4 - \tau)}{(T_1 - T_4) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} - \frac{T_5^3 \cdot (T_5 - \tau)}{(T_1 - T_5) \cdot (T_2 - T_5) \cdot (T_3 - T_5) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}} + 1.$$

Рассмотрим один вариант значения корней переходной характеристики системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе.

Здесь $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5$.

При этом, если $\tau = T_1$, то

$$h_{51}(t) = -\frac{T_2^3}{(T_2 - T_3) \cdot (T_2 - T_4) \cdot (T_2 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{T_3^3}{(T_2 - T_3) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_3 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} -$$

$$-\frac{T_4^3}{(T_2 - T_4) \cdot (T_3 - T_4) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} + \frac{T_5^3}{(T_2 - T_5) \cdot (T_3 - T_5) \cdot (T_4 - T_5)} \cdot e^{-\frac{t}{T_5}} + 1$$

Предположим $T_1 = 0,3T; T_2 = 0,25T; T_3 = 0,2T; T_4 = 0,15T; T_5 = 0,1T$. При $\tau = 0$

$$h_{51}(t) = -54 \cdot e^{-\frac{10}{3} \frac{t}{T}} + \frac{625}{6} \cdot e^{-4 \frac{t}{T}} - 64 \cdot e^{-5 \frac{t}{T}} + \frac{27}{2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{2}{3} \cdot e^{-10 \frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau = T_1$

$$h_{51}(t) = -\frac{125}{6} \cdot e^{-4 \frac{t}{T}} + 32 \cdot e^{-5 \frac{t}{T}} - \frac{27}{2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{4}{3} \cdot e^{-10 \frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau = 2T_1$

$$h_{51}(t) = \frac{162}{3} \cdot e^{-\frac{10}{3} \frac{t}{T}} - \frac{875}{6} \cdot e^{-4 \frac{t}{T}} + 128 \cdot e^{-5 \frac{t}{T}} - \frac{81}{2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{10}{3} \cdot e^{-10 \frac{t}{T}} + 1.$$

Проведена серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 1.

При этом $T_1 = 0,3T; T_2 = 0,25T; T_3 = 0,2T; T_4 = 0,15T; T_5 = 0,1T$.

Таблица 1 – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{51}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_1$	$\tau = 2T_1$
0	0	0	0
0,25	0,011262169	0,063624502	0,115986834
0,5	0,121809818	0,334619908	0,547429998
0,75	0,339020856	0,625112438	0,911204019
1	0,567405092	0,816918471	1,06643185
1,25	0,744354824	0,918160617	1,091966411
1,5	0,859569509	0,965445538	1,071321567
1,75	0,926833741	0,985957493	1,045081245
2	0,963338066	0,994442131	1,025546196
2,25	0,982160294	0,997841066	1,013521839
2,5	0,991511482	0,999172641	1,0068338
2,75	0,996030511	0,999686067	1,003341623
3	0,998168876	0,999881757	1,001594637
3,25	0,999164388	0,999955709	1,00074703
3,5	0,999621965	0,999983479	1,000344993
3,75	0,999830165	0,999993857	1,000157549
4	0,999924132	0,999997721	1,000071311
4,25	0,999966265	0,999999156	1,000032047
4,5	0,999985057	0,999999688	1,000014319
4,75	0,999993402	0,999999885	1,000006368
5	0,999997094	0,999999958	1,000002821

По результатам серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ .

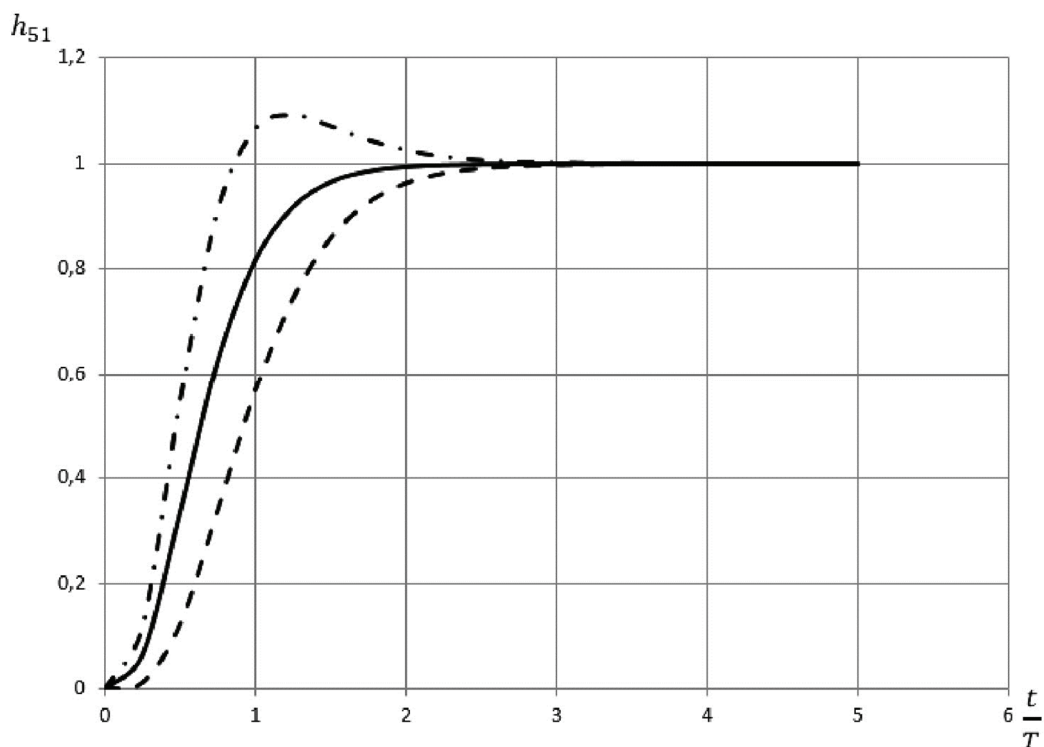


Рисунок 1 – Зависимость h_{51} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Выводы

Для систем пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции определены переходные характеристики.

Проведен численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ .

Установлено: если постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции, то переходные характеристики систем пятого порядка с пятью корнями кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции не имеют перерегулирования.

Литература

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии. (Политехнический вестник). – 2019. – № 1.

References

1. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Serkin A.D. Analysis of the transient characteristics of fifth order systems with multiple roots of the characteristic equation // Science. Engineering. Technology. (Polytechnical bulletin). – 2019. – № 1.