УДК 62

ФОРМИРОВАНИЕ МОНОТОННЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПАРОЙ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

♦♦♦♦♦

FORMATION OF MONOTONE TRANSITION CHARACTERISTICS OF THIRDORDER SYSTEMS WITH A PAIR OF COMPLEX ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Енокян Левон Эдуардович
студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Dobrobaba Yuriy Petrovich
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Power Supply of Industrial Enterprises,
Kuban State Technological University

Enokyan Levon Eduardovich
Student,
Kuban state technological university

Аннотация. Переходная характеристика системы второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения всегда имеет перерегулирование. Для устранения перерегулирования переходной характеристики системы второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения на ее вход установлен фильтр. Разработан алгоритм для определения постоянной времени фильтра, при которой переходная характеристика системы третьего порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения имеет монотонный вид.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы второго порядка, характеристическое уравнение системытретьего порядка, корни характеристического уравнения.

Annotation. The transition characteristic of a second order system with a pair of complex roots of the characteristic equation always has overshoot. To eliminate the overshoot of the transition characteristic of a second order system with a pair of complex roots of the characteristic equation, a filter is installed at its input. An algorithm has been developed for determining the filter time constant, in which the transition characteristic of a third order system with a pair of complex roots of the characteristic equation has a monotonic form.

Keywords: transition characteristic, characteristic equation of a secondorder system, characteristic equation of a thirdorder system, roots of the characteristic equation.

Передаточная функция систем второго порядка имеет вид:

$$W_{20}(p) = \frac{1}{\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p + 1},$$

где τ_1 и τ_2 – постоянные времени передаточной функции второго порядка, с.

Корни характеристического уравнения систем второго порядка:

$$p_{1;2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_1}{\tau_2^2} \pm \frac{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_2^2}}{2\tau_2^2}.$$

Если выполняется условие $\tau_1 < 2\tau_2$, то характеристическое уравнение системы второго порядка имеет пару комплексных корней. При этом переходная характеристика системы второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения и ее первая производная имеют вид:

$$h_{20}(t) = A\cdot e^{-\alpha t}\cdot \sin\Omega t + B\cdot e^{-\alpha t}\cdot \cos\Omega t + C;$$

$$h_{20}^{(1)}(t) = (-\alpha A - \Omega B)\cdot e^{-\alpha t}\cdot \sin\Omega t + (\Omega A - \alpha B)\cdot e^{-\alpha t}\cdot \cos\Omega t,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_1}{\tau_2^2}$; $\Omega = \frac{\sqrt{4\tau_2^2 - \tau_1^2}}{2\tau_2^2}$; $A = -\frac{\alpha}{\Omega}$; $B = -1$; $C = 1$.

При этом:

$$h_{20max} = e^{-\frac{\alpha}{\Omega}\pi} + 1.$$

Проведем первый численный эксперимент.

Если $\tau_2 = 0{,}75\ \tau_1$, то:

$$h_{20}(t) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{8}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}060209454.$$

Если $\tau_2 = \tau_1$, то:

$$h_{20}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}163033534.$$

Если $\tau_2 = 1{,}25\ \tau_1$, то:

$$h_{20}(t) = -\frac{2\sqrt{21}}{21} \cdot e^{-\frac{8}{25}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{21}}{25} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{8}{25}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{21}}{25} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}253826722.$$

Если $\tau_2 = 1{,}5\ \tau_1$, то:

$$h_{20}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot e^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}329321522.$$

Если $\tau_2 = 1{,}75\ \tau_1$, то:

$$h_{20}(t) = -\frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot e^{-\frac{8}{49}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{12\sqrt{5}}{49} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{8}{49}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{12\sqrt{5}}{49} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}391941783.$$

Если $\tau_2 = 2\tau_1$,то:

$$h_{20}(t) = -\frac{\sqrt{15}}{15} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + 1.$$

$$h_{20max} = 1{,}444344225.$$

Численный эксперимент показывает, что переходная характеристика системы второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения при выполнении условия $\tau_1 < 2\tau_2$ всегда имеет перерегулирование. Величина перерегулирования тем больше, чем τ_2 больше τ_1.

Предлагается, для устранения перерегулирования переходной характеристики системы второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения, на входе системы поставить фильтр (апериодическое звено).

В 1876 году Вышнеградский И.А. доказал, что переходная характеристика системы третьего порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения имеет монотонный вид, если выполняется условие: $\tau = \frac{1}{\alpha}$.

$$W_{30}(p) = \frac{1}{(\tau p + 1) \cdot (\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p + 1)};$$

$$W_{30}(p) = \frac{1}{\tau_2^2 \tau p^3 + (\tau_2^2 + \tau_1 \tau)p^2 + (\tau_1 + \tau)p + 1}.$$

Если $\tau_1 < 2\tau_2$, то:

$$p_{1;2} = -\alpha \pm j\Omega;\ p_3 = -\frac{1}{\tau}.$$

При выполнении условий $\tau_1 < 2\tau_2$ и $\tau = \frac{1}{\alpha}$ переходная характеристика системы третьего порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения и ее первая производная имеют вид:

$$h_{30}(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\Omega t + B \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos\Omega t + C \cdot e^{-\alpha t} + Д;$$

$$h_{30}^{(1)}(t) = (-\alpha A - \Omega B) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\Omega t + (\Omega A - \alpha B) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos\Omega t - \alpha C \cdot e^{-\alpha t},$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2^2};\ \Omega = \frac{\sqrt{4\tau_2^2 - \tau_1^2}}{2\tau_2^2};\ A = -\frac{\alpha}{\Omega};\ B = \frac{\alpha^2}{\Omega^2};\ C = -\frac{\alpha^2 + \Omega^2}{\Omega^2};\ Д = 1.$

Проведем второй численный эксперимент.

Если $\tau_2 = 0{,}75\tau_1$ и $\tau = 1{,}125\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{4}{5} \cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{9}{5} \cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

Если $\tau_2 = \tau_1$ и $\tau = 2\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{4}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

Если $\tau_2 = 1{,}25\tau_1$ и $\tau = 3{,}125\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{2\sqrt{21}}{21} \cdot e^{-\frac{8}{25}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{21}}{25} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{4}{21} \cdot e^{-\frac{8}{25}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{21}}{25} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{25}{21} \cdot e^{-\frac{8}{25}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

Если $\tau_2 = 1{,}5\tau_1$ и $\tau = 4{,}5\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot e^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{9}{8} \cdot e^{-\frac{2}{9}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

Если $\tau_2 = 1{,}75\tau_1$ и $\tau = 6{,}125\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{2\sqrt{5}}{15} \cdot e^{-\frac{8}{49}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{12\sqrt{5}}{49} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{4}{45} \cdot e^{-\frac{8}{49}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{12\sqrt{5}}{49} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{49}{45} \cdot e^{-\frac{8}{49}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

Если $\tau_2 = 2\tau_1$ и $\tau = 8\tau_1$, то:

$$h_{30}(t) = -\frac{\sqrt{15}}{15} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{t}{\tau_1}) + \frac{1}{15} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\tau_1}} \cdot \cos(\frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{t}{\tau_1}) - \frac{16}{15} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{t}{\tau_1}} + 1.$$

По результатам численных экспериментов на рисунках 1–6 построены переходные характеристики систем второго ($\tau = 0$) и третьего порядков с парой комплексных корней характеристического уравнения.

Выводы

Для устранения перерегулирования в системе второго порядка с парой комплексных корней характеристического уравнения предлагается установить на ее входе апериодическое звено.

Предлагается алгоритм для определения минимального значения постоянной времени апериодического звена, обеспечивающей монотонный вид переходной характеристики системы третьего порядка с парой комплексных корней.

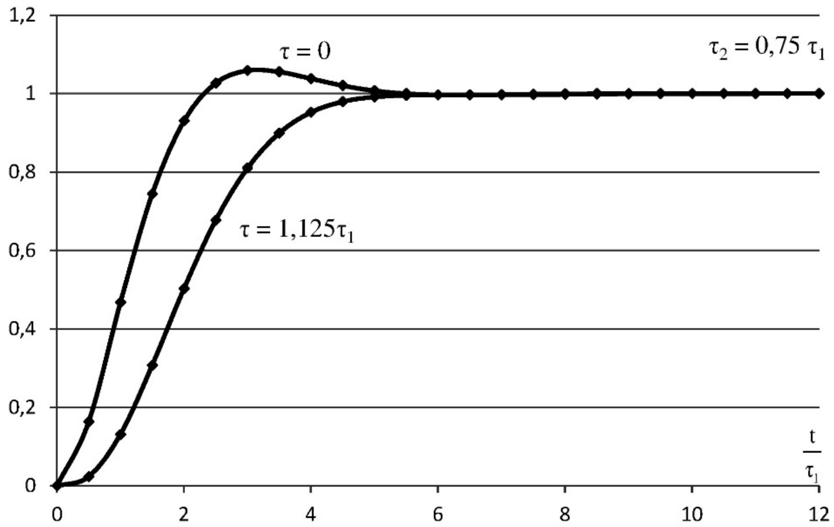

Рисунок 1 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ

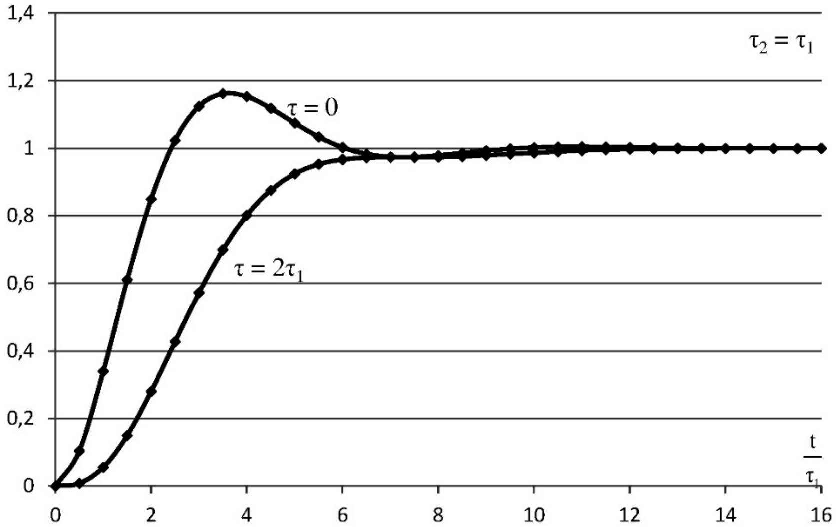

Рисунок 2 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ

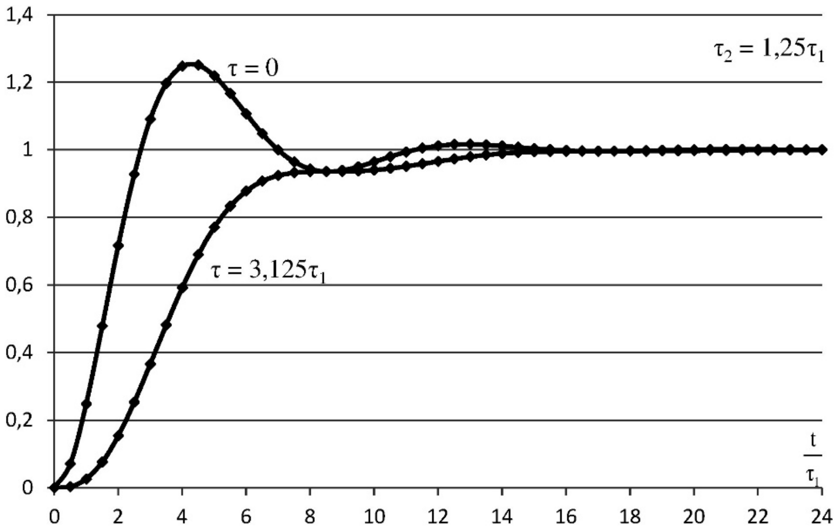

Рисунок 3 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ

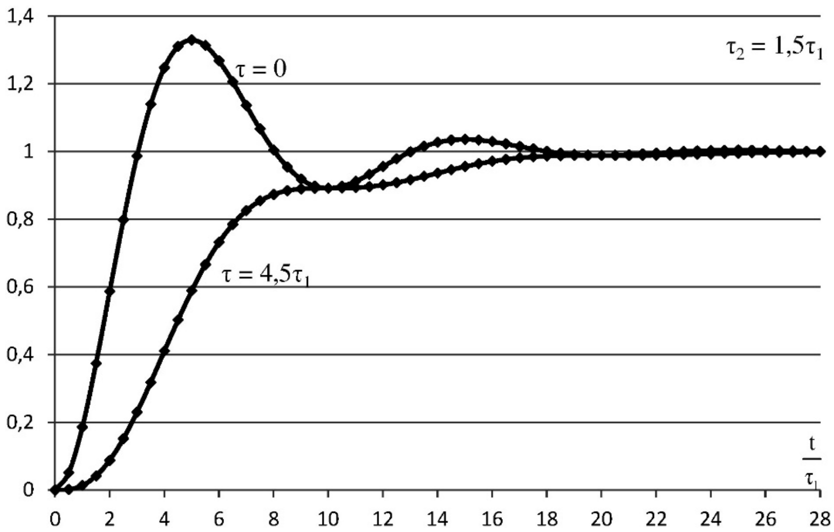

Рисунок 4 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ

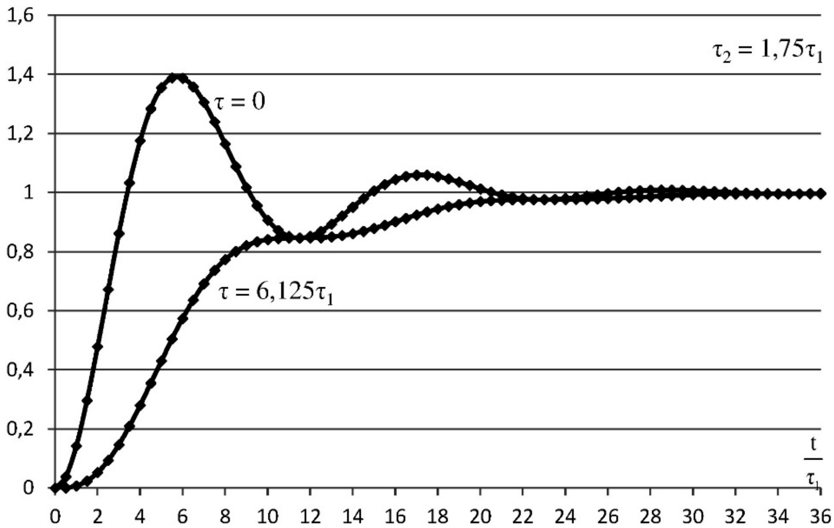

Рисунок 5 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ

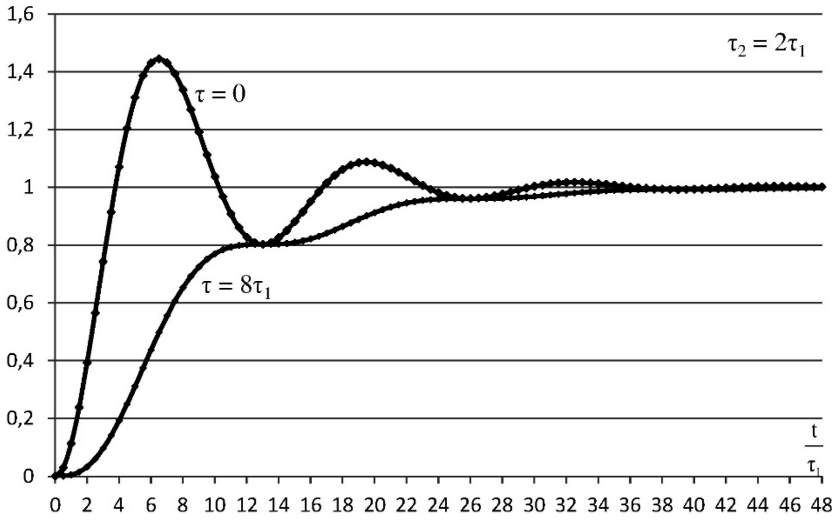

Рисунок 6 – Зависимость h_{30} от $\frac{t}{\tau_1}$ при различных τ