

УДК 62

**АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ДВУХМАССОВОЙ УПРУГОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
БЕЗ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ ЯКОРНОЙ ЦЕПИ ДВИГАТЕЛЯ**



**ANALYSIS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION
OF A TWO-MASS ELASTIC ELECTROMECHANICAL SYSTEM
WITHOUT TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF INDUCTION
OF AN ANCHOR ENGINE CHAIN**

Добробаба Юрий Петрович

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Енокян Левон Эдуардович

студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Асланова Диана Александровна

студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Аннотация. Переходная характеристика двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя обычно имеет колебательный вид. Определены области существования аperiodических переходных процессов в двухмассовой упругой электромеханической системе без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя. Найдена область монотонных переходных характеристик в двухмассовой упругой электромеханической системе без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя при комплексных корнях ее характеристического уравнения.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, корни характеристического уравнения, двухмассовая упругая электромеханическая система без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя.

Dobrobaba Yuriy Petrovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Power Supply of Industrial Enterprises,
Kuban State Technological University

Enokyan Levon Eduardovich

Student,
Kuban state technological university

Aslanova Diana Aleksandrovna

Student,
Kuban state technological university

Annotation. The transition characteristic of a two-mass elastic electromechanical system without taking into account the influence of induction of an anchor engine chain usually has an oscillatory form. The areas of existence of aperiodic transients in a two-mass elastic electromechanical system without taking into account the influence of induction of an anchor engine chain. The areas of monotonic transient characteristics is found in a two-mass elastic electromechanical system without taking into account the influence of induction of an anchor engine chain with the complex roots of its characteristic equation.

Keywords: characteristic equation, roots of the characteristic equation, two-mass elastic electromechanical system without taking into account the influence of the inductance of an anchor engine chain.

Математическая модель двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} U = C_e \omega_1 + R_{я} I_{я}; \\ C_M I_{я} = M_y + J_1 \omega_1^{(1)}; \\ M_y^{(1)} = C_y \cdot (\omega_1 - \omega_2); \\ M_y = M_{co} + J_2 \omega_2^{(1)}, \end{cases}$$

где U – напряжение, приложенное к якорной цепи электродвигателя; ω_1 – угловая скорость исполнительного органа двигателя, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $I_{я}$ – ток якорной цепи электродвигателя, А; M_y – упругий момент (момент в валопроводе), Н · м; ω_2 – угловая скорость исполнительного органа механизма, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; M_{co} – момент сопротивления

электропривода, $H \cdot м$; C_e – коэффициент пропорциональности между угловой скоростью исполнительного органа электродвигателя и его ЭДС, $\frac{В \cdot с}{рад}$; $R_{я}$ – сопротивление якорной цепи электродвигателя, Ом; C_M – коэффициент пропорциональности между током якорной цепи электродвигателя и его моментом, $В \cdot с$; J_1 – момент инерции исполнительного органа электродвигателя, $кг \cdot м^2$; C_y – жесткость вала-провода, $\frac{Н \cdot м}{рад}$; J_2 – момент инерции исполнительного органа механизма, $кг \cdot м^2$.

Передаточная функция двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя по каналу управления имеет вид:

$$\frac{W_2(p)}{U(p)} = \frac{1}{C_e} \cdot \frac{1}{\frac{R_{я}J_1J_2}{C_e C_M C_y} \cdot p^3 + \frac{J_2}{C_y} \cdot p^2 + \frac{R_{я}(J_1 + J_2)}{C_e C_M} \cdot p + 1}$$

Представим передаточную функцию двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя по каналу управления в виде:

$$\frac{W_2(p)}{U(p)} = \frac{1}{C_e} \cdot \frac{1}{(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)},$$

где $T_1 \div T_3$ – постоянные времени передаточной функции.

При $T_1 < 2 \cdot T_2$ корни характеристического уравнения имеет вид:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega; p_3 = -\frac{1}{T_3},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1}{T_2^2}; \Omega = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}.$$

Если $T_3 = \frac{1}{\alpha}$, то

$$T_3 = 2 \cdot \frac{T_2^2}{T_1}.$$

При этом справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{R_{я}J_1J_2}{C_e C_M C_y} = 2 \cdot \frac{T_2^4}{T_1}; \\ \frac{J_2}{C_y} = 3 \cdot T_2^2; \\ \frac{R_{я}(J_1 + J_2)}{C_e C_M} = T_1 + 2 \cdot \frac{T_2^2}{T_1}. \end{cases}$$

Из системы следует, что:

$$T_1 = \frac{R_{я}(J_2 - 2 \cdot J_1)}{C_e C_M};$$

$$T_2 = \frac{R_{я}}{C_e C_M} \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot J_1 \cdot (J_2 - 2 \cdot J_1)};$$

$$T_3 = 3 \cdot \frac{R_{я}J_1}{C_e C_M}.$$

$$C_y = \frac{2}{9} \cdot \frac{C_e C_M}{R_{я}J_1} \cdot \frac{C_e C_M}{R_{я}(J_2 - 2 \cdot J_1)} \cdot J_2.$$

При этом должно выполняться условие:

$$J_1 < \frac{1}{2} \cdot J_2.$$

Выполним первую серию численного эксперимента.

Если $J_1 = \frac{15}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{5}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{45}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{135} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{7}{16} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{\sqrt{21}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{21}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{256}{63} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{13}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{3}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{13}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{39}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{351} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{3}{8} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{9}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{64}{27} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{11}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{5}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{\sqrt{165}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{33}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{495} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{5}{16} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{15}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{256}{135} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{9}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{7}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{21}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{27}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{567} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{1}{4} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{16}{9} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{7}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{21}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{21}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{567} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{3}{16} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{9}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{256}{135} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{5}{32} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{11}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{\sqrt{165}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{15}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{495} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{1}{8} \cdot J_2$, то:

$$T_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{64}{27} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

При $T_1 = 2 \cdot T_2$ передаточная функция двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя по каналу управления представлена в виде:

$$\frac{W_2(p)}{U(p)} = \frac{1}{C_e} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}T_1 p + 1\right)^2 \cdot (T_3 p + 1)}.$$

При этом корни характеристического уравнения имеют вид:

$$p_{1,2} = -\frac{2}{T_1}; p_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{R_{я}J_1J_2}{C_e C_M C_y} = \frac{1}{4} T_1^2 T_3; \\ \frac{J_2}{C_y} = \frac{1}{4} T_1^2 + T_1 T_3; \\ \frac{R_{я}(J_1 + J_2)}{C_e C_M} = T_1 + T_3. \end{cases}$$

Из системы следует, что:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{я}(4 \cdot J_1 + J_2)}{C_e C_M} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{я} \cdot \sqrt{J_2^2 - 8 \cdot J_1 \cdot J_2}}{C_e C_M};$$

$$T_3 = \frac{R_{я}(J_1 + J_2)}{C_e C_M} - T_1;$$

$$C_y = \frac{J_2}{T_1} \cdot \frac{1}{\frac{R_{я}(J_1 + J_2)}{C_e C_M} - \frac{3}{4} T_1}.$$

При этом должно выполняться условие:

$$J_1 < \frac{1}{8} \cdot J_2.$$

При $J_1 = \frac{1}{8} \cdot J_2$:

$$T_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = T_3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{64}{27} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Выполним вторую серию численного эксперимента.

Если $J_1 = \frac{3}{32} \cdot J_2$, то:

вариант 1

$$T_1 = \frac{15}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{15}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{5}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{375} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2};$$

вариант 2

$$T_1 = \frac{7}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{7}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{21}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y = \frac{1024}{343} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{1}{16} \cdot J_2$, то:

вариант 1

$$T_1 = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{256 \cdot (71 - 8\sqrt{2})}{4913} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2};$$

вариант 2

$$T_1 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{7 + 4\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{256 \cdot (71 + 8\sqrt{2})}{4913} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{1}{32} \cdot J_2$, то:

вариант 1

$$T_1 = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{15 - 8\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{1024 \cdot (69 - 16\sqrt{3})}{11979} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2};$$

вариант 2

$$T_1 = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{15 + 8\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{1024 \cdot (69 + 16\sqrt{3})}{11979} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 = \frac{1}{64} \cdot J_2$, то:

вариант 1

$$T_1 = \frac{17 + 4\sqrt{14}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{17 + 4\sqrt{14}}{64} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{31 - 8\sqrt{14}}{64} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{4096 \cdot (671 - 112\sqrt{14})}{274625} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2};$$

вариант 2

$$T_1 = \frac{17 - 4\sqrt{14}}{32} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 = \frac{17 - 4\sqrt{14}}{64} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 = \frac{31 + 8\sqrt{14}}{64} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M};$$

$$C_y = \frac{4096 \cdot (671 + 112\sqrt{14})}{274625} \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2}.$$

Если $J_1 \rightarrow 0$, то:

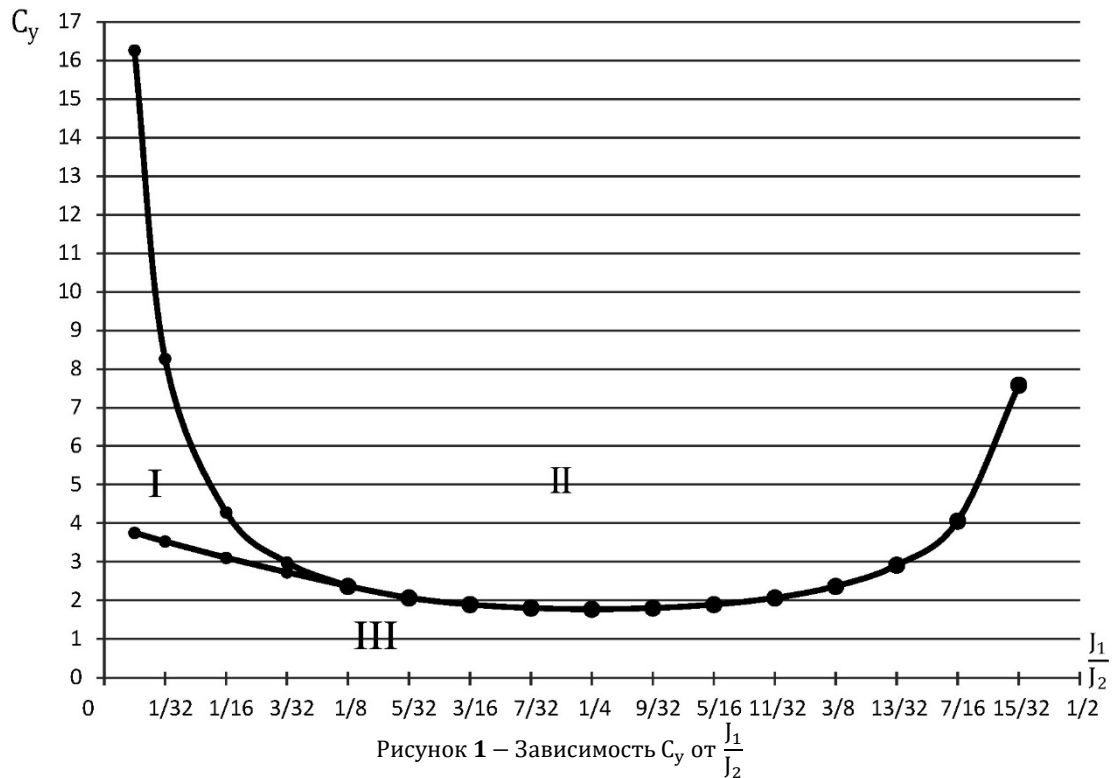
вариант 1

$$T_1 \rightarrow \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; T_3 \rightarrow 0; C_y \rightarrow 4 \cdot \frac{C_e^2 C_M^2}{R_{я}^2 J_2};$$

вариант 2

$$T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; T_3 \rightarrow \frac{R_{я}J_2}{C_e C_M}; C_y \rightarrow \infty.$$

По результатам численных экспериментов на рисунке 1 представлены три области качественно различного распределения корней характеристического уравнения двухмассовой упругой электромеханической системы без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя. В области I – аperiodические процессы; в области II – монотонные переходные процессы; в области III – колебательные переходные процессы.



Выводы

Двухмассовая упругая электромеханическая система без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя описывается системой уравнений третьего порядка. Корни характеристического уравнения имеют четыре расклада: три разных по величине корня; два равных по величине и один не равный двум первым; три равных корня; пара комплексных корней и один действительный. В первых трех случаях переходные характеристики монотонные. В четвертом случае переходные процессы могут иметь как монотонный, так и колебательный переходные процессы.

Определены условия, при которых двухмассовая упругая электромеханическая система без учета влияния индуктивности якорной цепи двигателя имеет конкретный переходный процесс.