УДК 62

# АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

––––––

# THE ANALYSIS OF TRANSITIONAL FEATURES OF THE SYSTEM OF THE FIFTH ORDER WITH MULTIPLE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

**Добробаба Юрий Петрович**
кандидат технических наук, доцент,
профессор кафедры электроснабжения промышленных предприятий,
Кубанский государственный технологический университет

**Dobrobaba Yury Petrovich**
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Professor of department of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

**Мурлин Алексей Георгиевич**
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем и программирования,
Кубанский государственный технологический университет

**Murlin Aleksey Georgievich**
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Associate professor of department of information systems and programming,
Kuban state technological university

**Серкин Александр Дмитриевич**
студент,
Кубанский государственный технологический университет

**Serkin Aleksandr Dmitrievich**
Student,
Kuban state technological university

**Аннотация.** Найдены переходные характеристики систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени.
Выявлено и доказано, чтопереходные характеристики систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование при условии $\tau > \frac{1}{5}T$.

**Ключевые слова:** переходная характеристика, характеристическое уравнение системы пятого порядка, корни характеристического уравнения.

**Annotation**. The transient characteristics of the fifth-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree are found.
Revealed and proved that the transient characteristics of fifth-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of the first degree have overshoot under the condition $\tau > \frac{1}{5}T$.

**Keywords:** transient response, characteristic equation of the fifth order system, roots of the characteristic equation.

Передаточная функция системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{50}(p) = \frac{1}{\frac{1}{3125}T^5p^5+\frac{1}{125}T^4p^4+\frac{2}{25}T^3p^3+\frac{2}{5}T^2p^2+Tp+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}Tp+1\right)^5},$$

где $T$ – постоянная времени полинома знаменателя передаточной функции пятого порядка.

Корни характеристического уравнения системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения: $Tp_{1\div5} = -5$.

Переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}(t) = K_1 \cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + K_3 \cdot t^2 \cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + K_4 \cdot t^3 \cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} +$$
$$+K_5 \cdot t^4 \cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + K_6.$$

Первая производная переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}^{(1)}(t) = \left(-5 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2\right) \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} + \left(-5 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3\right) \cdot t \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-5 \cdot \frac{K_3}{T} + 3K_4\right) \cdot t^2 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} + \left(-5 \cdot \frac{K_4}{T} + 4K_5\right) \cdot t^3 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} -$$
$$-5 \cdot \frac{K_5}{T} \cdot t^4 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Вторая производная переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}^{(2)}(t) = \left(25 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 10 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3\right) \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(25 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 20 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4\right) \cdot t \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(25 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 30 \cdot \frac{K_4}{T} + 12K_5\right) \cdot t^2 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(25 \cdot \frac{K_4}{T^2} - 40 \cdot \frac{K_5}{T}\right) \cdot t^3 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} + 25 \cdot \frac{K_5}{T^2} \cdot t^4 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Третья производная переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}^{(3)}(t) = \left(-125 \cdot \frac{K_1}{T^3} + 75 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 30 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4\right) \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-125 \cdot \frac{K_2}{T^3} + 150 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 90 \cdot \frac{K_4}{T} + 24K_5\right) \cdot t \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-125 \cdot \frac{K_3}{T^3} + 225 \cdot \frac{K_4}{T^2} - 180 \cdot \frac{K_5}{T}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-125 \cdot \frac{K_4}{T^3} + 300 \cdot \frac{K_5}{T^2}\right) \cdot t^3 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} - 125 \cdot \frac{K_5}{T^3} \cdot t^4 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}};$$

Четвертая производная переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}^{(4)}(t) = \left(625 \cdot \frac{K_1}{T^4} - 500 \cdot \frac{K_2}{T^3} + 300 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 120 \cdot \frac{K_4}{T} + 24K_5\right) \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(625 \cdot \frac{K_2}{T^4} - 1000 \cdot \frac{K_3}{T^3} + 900 \cdot \frac{K_4}{T^2} - 480 \cdot \frac{K_5}{T}\right) \cdot t \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(625 \cdot \frac{K_3}{T^4} - 1500 \cdot \frac{K_4}{T^3} + 1800 \cdot \frac{K_5}{T^2}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(625 \cdot \frac{K_4}{T^4} - 2000 \cdot \frac{K_5}{T^3}\right) \cdot t^3 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} + 625 \cdot \frac{K_5}{T^4} \cdot t^4 \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Так как начальные и конечное значения передаточной функции пятого порядка (с точки зрения физики) равны:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = 0; \\ h_{50}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(3)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(4)}(0) = 0; \\ h_{50}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения передаточной функции пятого порядка (с точки зрения математики) равны:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = K_1 + K_6; \\ h_{50}^{(1)}(0) = -5 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2; \\ h_{50}^{(2)}(0) = 25 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 10 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3; \\ h_{50}^{(3)}(0) = -125 \cdot \frac{K_1}{T^3} + 75 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 30 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4; \\ h_{50}^{(4)}(0) = 625 \cdot \frac{K_1}{T^4} - 500 \cdot \frac{K_2}{T^3} + 300 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 120 \cdot \frac{K_4}{T} + 24K_5; \\ h_{50}(\infty) = K_6, \end{cases}$$

то справедливы следующие соотношения:

$$K_6 = 1;$$

$$\begin{cases} K_1 + 1 = 0; \\ -5 \cdot \dfrac{K_1}{T} + K_2 = 0; \\ 25 \cdot \dfrac{K_1}{T^2} - 10 \cdot \dfrac{K_2}{T} + 2K_3 = 0; \\ -125 \cdot \dfrac{K_1}{T^3} + 75 \cdot \dfrac{K_2}{T^2} - 30 \cdot \dfrac{K_3}{T} + 6K_4 = 0; \\ 625 \cdot \dfrac{K_1}{T^4} - 500 \cdot \dfrac{K_2}{T^3} + 300 \cdot \dfrac{K_3}{T^2} - 120 \cdot \dfrac{K_4}{T} + 24K_5 = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_1 = -1;$$

$$K_2 = -\frac{5}{T};$$

$$K_3 = -\frac{25}{2T^2};$$

$$K_4 = -\frac{125}{6T^3};$$

$$K_5 = -\frac{625}{24T^4}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{50}(t) = -e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} - 5 \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} - \frac{25}{2} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} - \frac{125}{6} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} -$$

$$-\frac{625}{24} \cdot \frac{t^4}{T^4} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}} + 1.$$

$$h_{40}^{(1)}(t) = \frac{3125}{24T} \cdot \frac{t^4}{T^4} \cdot e^{-5 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Передаточная функция системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{51}(p) = \frac{\tau p + 1}{\frac{1}{3125}T^5 p^5 + \frac{1}{125}T^4 p^4 + \frac{2}{25}T^3 p^3 + \frac{2}{5}T^2 p^2 + Tp + 1} = \frac{\tau p + 1}{\left(\frac{1}{5}Tp + 1\right)^5},$$

где $\tau$ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка.

Переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{51}(t) = -e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - 5\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{25}{2}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{125}{6}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} -$$
$$-\frac{625}{24}\cdot\frac{t^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + 1 + \frac{3125}{24}\cdot\frac{\tau}{T}\cdot\frac{t^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{51}(t) = -e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - 5\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{25}{2}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{125}{6}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} +$$
$$+\frac{625}{24}\cdot\left(5\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + 1.$$

Если $\tau = \frac{1}{5}T$, то:

$$h_{51}(t) = -e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - 5\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{25}{2}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{125}{6}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} + 1.$$

Если $h_{51}(t_*) = 1$, то справедливы соотношения:

$$e^{-5\cdot\frac{t_*}{T}} + 5\cdot\frac{t_*}{T}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_*}{T}} + \frac{25}{2}\cdot\frac{t_*^2}{T^2}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_*}{T}} + \frac{125}{6}\cdot\frac{t_*^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_*}{T}} = \frac{625}{24}\cdot\left(5\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t_*^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_*}{T}};$$

$$T^5 + 5T^4\cdot t_* + \frac{25}{2}T^3\cdot t_*^2 + \frac{125}{6}T^2\cdot t_*^3 = \frac{625}{24}\cdot(5\tau - T)\cdot t_*^4;$$

$$t_*^4 - \frac{4}{5}\cdot\frac{T^2}{5\tau - T}\cdot t_*^3 - \frac{12}{25}\cdot\frac{T^3}{5\tau - T}\cdot t_*^2 - \frac{24}{125}\cdot\frac{T^4}{5\tau - T}\cdot t_* - \frac{24}{625}\cdot\frac{T^5}{5\tau - T} = 0,$$

где $t_*$ – время, за которое переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{5}T$.

Первая производная переходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{51}^{(1)}(t) = \frac{3125}{6}\cdot\frac{\tau}{T^2}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}} - \frac{3125}{24T}\cdot\left(5\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t}{T}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}} h_{51}^{(1)} = 0$, тосправедливо уравнение:

$$\frac{3125}{6}\cdot\frac{\tau}{T^2}\cdot\frac{t_{\text{экстр}}^3}{T^3}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} - \frac{3125}{24T}\cdot\left(5\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t_{\text{экстр}}^4}{T^4}\cdot e^{-5\cdot\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} = 0.$$

Из уравнения следует, что:

$$t_{\text{экстр}} = \frac{4T\tau}{5\tau - T},$$

где $t_{\text{экстр}}$ – время, при котором переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{5}T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице.

**Таблица** – Результаты первой серии численного эксперимента

| $\frac{t}{T}$ | $h_{51}$ | | |
|---|---|---|---|
| | $\tau = 0$ | $\tau = \frac{1}{5}T$ | $\tau = \mathrm{T}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,25 | 0,009124282 | 0,038269057 | 0,154848157 |
| 0,5 | 0,108821987 | 0,242423872 | 0,776831411 |
| 0,75 | 0,322452388 | 0,516232636 | 1,291353626 |
| 1 | 0,559506715 | 0,734974084 | 1,436843564 |
| 1,25 | 0,747014676 | 0,869749645 | 1,360689519 |
| 1,5 | 0,867938143 | 0,94085454 | 1,232520126 |
| 1,75 | 0,935993153 | 0,974696119 | 1,129507986 |
| 2 | 0,970747311 | 0,989663949 | 1,065330499 |
| 2,25 | 0,987249526 | 0,995930849 | 1,030656143 |
| 2,5 | 0,994654494 | 0,998445442 | 1,013609233 |
| 2,75 | 0,997830522 | 0,999420717 | 1,004872339 |
| 3 | 0,999143358 | 0,999788621 | 1,002369672 |
| 3,25 | 0,999669603 | 0,999924237 | 1,000942775 |
| 3,5 | 0,999875134 | 0,999973261 | 1,000365769 |
| 3,75 | 0,999953641 | 0,999990689 | 1,000138884 |
| 4 | 0,999983055 | 0,999996796 | 1,00005176 |
| 4,25 | 0,999993891 | 0,999998909 | 1,000018978 |
| 4,5 | 0,999997825 | 0,999999632 | 1,000006859 |
| 4,75 | 0,999999234 | 0,999999876 | 1,000002447 |
| 5 | 0,999999733 | 0,999999959 | 1,0000010863 |

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ.

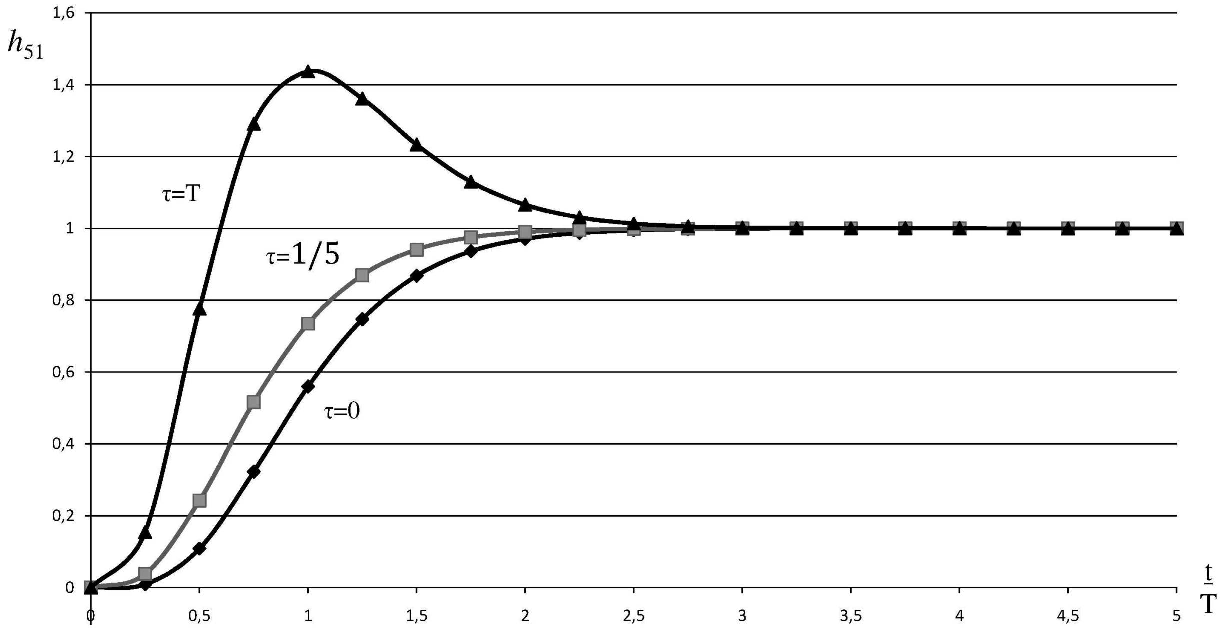


**Рисунок 1** – Зависимость $h_{51}$ от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена вторая серия численного эксперимента.

Если $\tau = \frac{1}{5}T$, то $t_* = \infty$; $t_{\text{экстр}} = \infty$; $h_{\text{макс}} = 1$.

Если $\tau = 0{,}3T$, то $t_* = 2{,}140219185T$; $t_{\text{экстр}} = 2{,}4T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}000362509$.

Если $\tau = 0{,}4T$, то $t_* = 1{,}300212547T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}6T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}014872177$.

Если $\tau = 0{,}5T$, то $t_* = 1{,}004204024T$; $t_{\text{экстр}} = \frac{4}{3}T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}05623156$.

Если $\tau = 0{,}6T$, то $t_* = 0{,}848002305T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}2T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}11650352$.

Если $\tau = 0{,}7T$, то $t_* = 0{,}749428832T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}12T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}188196611$.

Если $\tau = 0{,}8T$, то $t_* = 0{,}680557777T$; $t_{\text{экстр}} = \frac{16}{15}T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}266967753$.

Если $\tau = 0{,}9T$, то $t_* = 0{,}629173831$; $t_{\text{экстр}} = \frac{36}{35}T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}353404673$.

Если $\tau = T$, то $t_* = 0{,}589037232T$; $t_{\text{экстр}} = T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}436843564$.

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

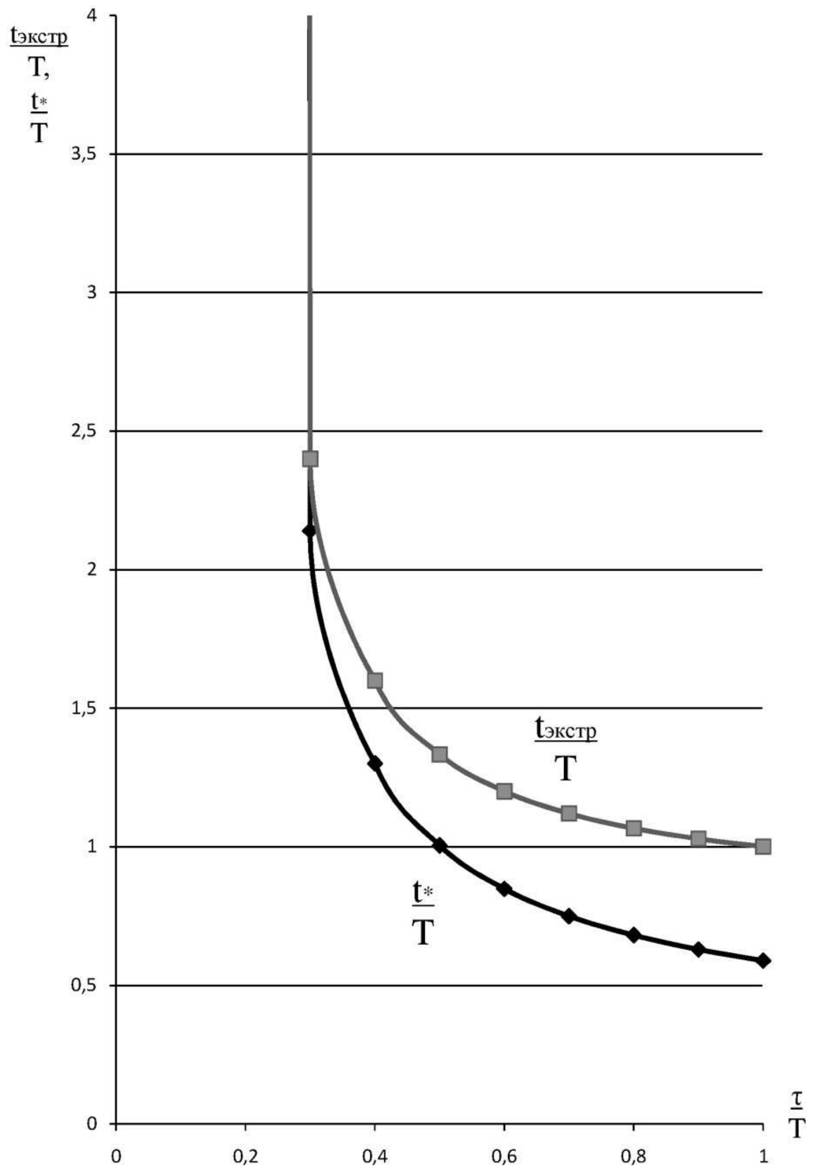


**Рисунок 2** – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

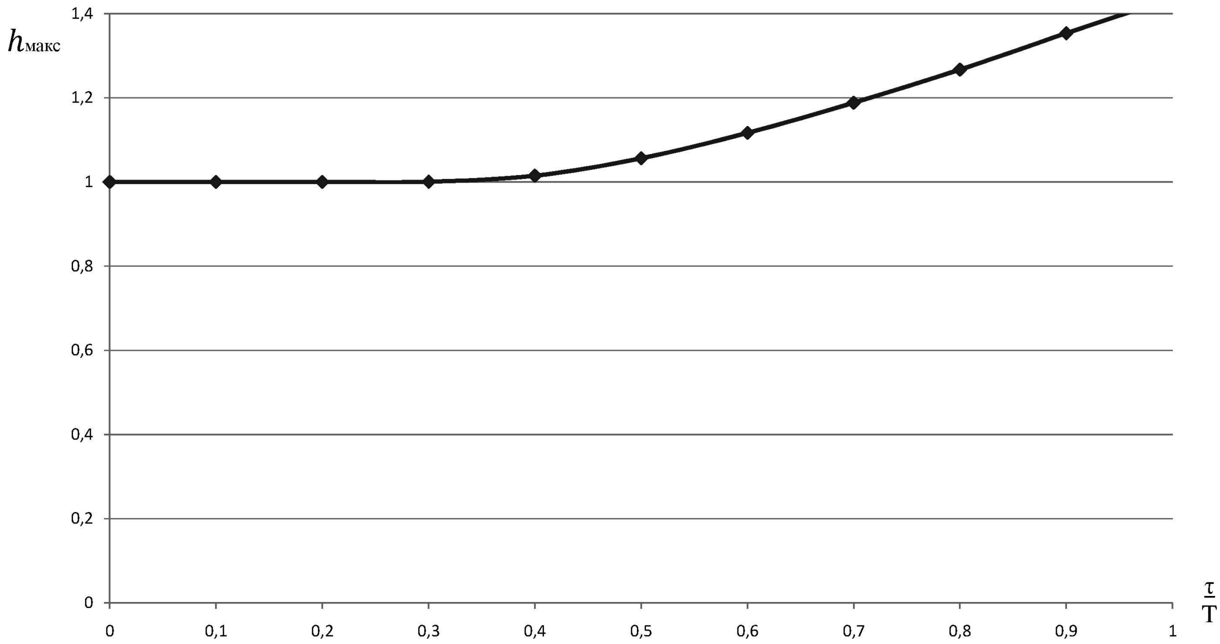


**Рисунок 3** – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

## Вывод

Получены переходные характеристики систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени.

Проведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях $\tau$.

Проведен второй численный эксперимент, на основании которого получены зависимости времени, при котором переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения,времени, за которое переходная характеристика системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения от постоянной времени полинома числителя передаточной функции пятого порядкаимаксимального значенияпереходной характеристики системы пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени от постоянной времени полинома числителя передаточной функции пятого порядкав относительных единицах.

Установлено, что при условии $\tau > \frac{1}{5}T$ переходные характеристики систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование.