УДК 621.01
69.04

СТУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ФЕРМ

–––––––

STRUCTURAL ANALYSIS AND SYNTHESIS OF FARM

Смелягин Анатолий Игоревич
доктор технических наук, профессор
кафедры наземного транспорта и механики,
Кубанский государственный
технологический университет
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoly Igorevich
Doctor of technical sciences, professor
Department of land transport and mechanics,
Kuban State Technological University
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Изучение любых инженерных объектов обычно начинают со структурного анализа. Это объясняется тем, что прежде чем приступить к расчету и исследованию любой конструкции специалисту необходимо знать с каким объектом он имеет дело. Показано, что структурный анализ и синтез машин, механизмов, строительных конструкцийэто единая наука. Однако исторически сложилось так, что в разных областях инженерной и научной деятельности структурный анализ развивался самостоятельно. Это привело к тому, что для решения одних и тех же задач в одной области науки используются различные термины, методы и теории.Так в строительной механикераздел, занимающийся структурным анализом статических конструкций, почему-то называется кинематическим анализом сооружений в который ещё вводят чужеродные и ненужные для структуры механических объектов понятия. В работе,на многочисленных примерах, показано, что для синтеза и определения статической неопределимости любых строительных конструкций достаточно использовать предложенные структурные формулы и математические модели.

Annotation. The study of any engineering objects usually begin with a structural analysis. This is explained by the fact that before proceeding with the calculation and study of any design, a specialist needs to know what object he is dealing with. It is shown that structural analysis and synthesis of machines, mechanisms, building structures is a single science. However, historically, in different areas of engineering and scientific activity, structural analysis developed independently. This led to the fact that for solving the same problems in the same field of science, different terms, methods and theories are used. So in structural mechanics, the section dealing with the structural analysis of static structures is for some reason called the kinematic analysis of structures into which concepts that are alien and unnecessary for the structure of mechanical objects are also introduced. In the work, on numerous examples, it is shown that for the synthesis and determination of the static indeterminacy of any building structures, it is sufficient to use the proposed structural formulas and mathematical models.

Ключевые слова: структура, анализ, синтез, конструкции, фермы, опоры, структурные формулы, структурныематематические модели статически определимыенеопределимыеконструкции, избыточные связи, местные степени свободы.

Keywords: structure, analysis, synthesis, structures, trusses, supports, structural formulas, structural mathematical models, statically definable indefinable constructions, redundant links, local degrees of freedom.

Введение

Инженерные объекты можно разделить на две большие группы – подвижные (механизмы и машины) и неподвижные (строительные конструкции). В свою очередь неподвижные объекты делят на статически определимые и статически неопределимые конструкции.

При создании любого механического объекта на стадии его разработки и проектирования постоянно приходится решать задачи, связанные с его подвижностью и статической неопределимостью.

Устройство является подвижным, если у него число степеней свободы равно или больше единицы.

Устройство является неподвижным (статическим), если у него число степеней меньше единицы.

Под степенью статической неопределимости объекта обычно понимают разность между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы [3].

Механическая система считается статически определимой, если число неизвестных реакций равно или меньше числа независимых уравнений равновесий.

Механическая система считается статически неопределимой, если число неизвестных усилий больше числа независимых уравнений равновесий.

Из сказанного следует, что раскрыть статическую неопределимость механической системы можно только после силового анализа. Составление и анализ уравнений равновесия любой механической системы является трудоемким процессом, который требует специалистов высокой квалификации.

Такой алгоритм проектирования механических систем усложняет и удорожает процедуру их создания.

Покажем, что для определения статической неопределимости любой механической конструкций нет необходимости заниматься её силовым анализом, а достаточно проанализировать только ее структуру [5–10].

Отметим, что структурный анализ и синтез машин, механизмов, конструкций это единая наука.

Однако исторически сложилось так, что в разных областях инженерной и научной деятельности структурный анализ развивался самостоятельно.

Это привело к тому, что для решения одних и тех же задач в одной области науки используются различные термины, методы и теории [1–10].

Так в строительной механике [1, 2, 4, 11, 12]:

- раздел, занимающийся структурным анализом статических конструкций, почему-то называется кинематическим анализом сооружений;
- вводят чужеродные и ненужные для структуры механических объектов понятия:
- диск, кинематическая связь, простые и кратные шарниры, цилиндрическая подвижная опора и т.д.

Балки, брусья, стержни, пластины, оболочки, фермы и т.п. конструкции находят широкое применение на практике, как самостоятельные объекты, так и к ним при расчетах приводятся и большинство деталей, звеньев и тому подобных изделий.

Покажем, на примере ферм, эффективность теории структурного анализа и синтеза механизмов и машин.

Ферма (фр. ferme, лат firmus) – это геометрически не изменяемая стержневая конструкция.

Фермы обычно изготавливают из прямолинейных стержней [1–4], которые соединяются между собой различными способами. Места соединения стержней фермы называют узлами. При расчёте ферм принимают, что узловые соединения являются подвижными (шарнирными), а действующие на ферму нагрузки считают сосредоточенными в узлах. Допущения о шарнирном соединении узлов и узловом приложении нагрузки позволяют при расчёте фермы рассчитывать стержни на растяжение-сжатие. При расчете ферм весом стержней и трением в шарнирах пренебрегают. Расчет ферм сводится к определению опорных реакций и усилий в стержнях.

Фермы применяют главным образом в строительстве (пролётные строения зданий, мостов, мачты, опоры линий электропередачи, и др.) и других отраслях в качестве несущих конструкций.

Фермы могут воспринимать нагрузку лишь в том случае, если они сохраняют заданную им при возведении внутреннюю структуру, то есть геометрическую форму и положение. Другими словами, сооружение должно быть геометрически неизменяемым и неподвижным относительно основания. Изменение формы фермы возможно лишь в допустимых пределах за счет деформации ее элементов.

Структурный анализ ферм

При разработке и проектировании ферм постоянно приходится решать ответственную задачу их структурного анализа. Отметим, что если ферма будет не правильно спроектирована, то она в процессе эксплуатации может сложиться, что приведет к катастрофическим последствиям.

Для выяснения того, обладает ли проектируемая ферма способностью сохранять свою первоначальную форму, а также для уяснения роли, которую играют ее отдельные элементы в работе сооружения, служит структурный анализ. Существовавший до настоящего времени структурный анализ ферм [1, 2, 4]:

- часто проводился по структурным моделям (расчетным схемам), не соответствующим реальному объекту;
- был разработан только для «плоских» объектов;
- проводился по структурным формулам, не отражающим физической сути явлений, происходящих в исследуемом объекте;
- не учитывал и не применял современные методы и достижения более развитого структурного анализа, используемого при анализе машин и механизмов.

В работах [5–10] доказано, что для определения статической неопределимости любой механической системы, в том числе и ферм, нет необходимости заниматься составлением и решением уравнений статики, а достаточно проанализировать только ее структуру (определить подвижность) с помощью [5–10] структурных формул (1) и (2):

$$W = Пn - \sum_{i=1}^{П-1} (П - i) p_i , \tag{1}$$

$$W = \sum_{i=1}^{П-1} i p_i + Пk , \tag{2}$$

и структурных математических моделей (3) и (4):

$$\begin{cases} 2p = \sum\limits_{t=T-j}^{2} t \cdot n_t + S; \\ n = \sum\limits_{t=T-j}^{2} n_t; \\ W = \sum\limits_{i=1}^{П-1} i \cdot p_i - k \cdot П; \\ k = p - n; \\ p = \sum\limits_{i=1}^{П-1} p_i; \\ T \le k+1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 2p = \sum\limits_{t=T-j}^{2} t \cdot n_t + S; \\ n = \sum\limits_{t=T-j}^{2} n_t; \\ W = П \cdot n - \sum\limits_{i=1}^{П-1} (П - i) p_i; \\ k = p - n; \\ p = \sum\limits_{i=1}^{П-1} p_i; \\ T \le k+1 \end{cases} \tag{4}$$

где W – подвижность (число степеней свободы); $П$ – подвижность пространства в котором существует исследуемый объект; n – общее число звеньев (стержней); $p = \sum\limits_{i=1}^{П-1} p_i$ – общее число кинематических пар; p_i – количество пар i-той подвижности в исследуемой механической системе; i – целочисленный индекс i = 1, 2, 3, ...; $k = p - n$ – число независимых замкнутых контуров; T – базовое звено, то есть звено с наибольшим числом элементов кинематических пар; n_t – число t-вершинных звеньев, входящих в конструкцию; S – число элементов кинематических пар, которыми кинематические цепи устройства присоединяются к стойке; j = 0, 1, 2, … – целочисленный индекс.

Структурные математические модели механических систем позволяют правильно и однозначно определить, какой правильную или неправильную структуру имеет исследуемый объект. Кроме того, структурные математические модели позволяют не изобретать новые механические системы, а целенаправленно их синтезировать.

Определим статическую неопределимость широко распространенных на практике ферм и проверим их структуру.

Пример 1

Раскроем статическую определимость простейшей фермы, приведенной на рисунке 1.

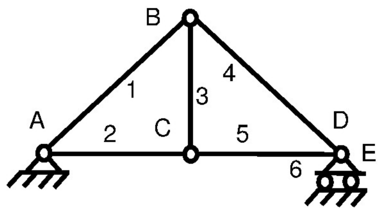

Рисунок 1 – Структурная схема фермы

Анализ рисунка 1 показывает, что изображенная ферма не удобна для структурного анализа, так как из-за совмещенности в узлах шарниров (кинематических пар) трудно подсчитать их общее количество p. Так же сложно определить по этой расчетной схеме каким количеством элементов кинематических пар (вершин) обладают стержни (звенья).

Для удобства структурного анализа представим исследуемую ферму в развернутом виде (рис. 2).

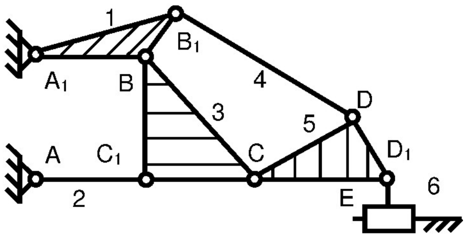

Рисунок 2 – Развернутая структурная схема фермы

Из рисунка 2 видно, что узлы A, B, C, D состоят, соответственно, из двух одноподвижных кинематических вращательных пар (p_1 = 2). Кстати, количество шарниров p, которые входят в узел, можно определить и, не разворачивая его, если воспользоваться формулой:

$$p = n - 1 + S\,, \qquad (5)$$

где n – число стержней, сходящихся в узле; p – число кинематических пар (шарниров) в узле; S – число присоединений к стойке для опорных узлов.

Найдем, в соответствии с (5), число кинематических пар в узлах:

- узел A – $p = 2 - 1 + 1 = 2$;
- узел B – $p = 3 - 1 + 0 = 2$;
- узел C – $p = 3 - 1 + 0 = 2$;
- узел D – $p = 3 - 1 + 0 = 2$;
- узел E(кинематическая пара) – $p = 1 - 1 + 1 = 1$.

Анализ фермы (рис. 2) показывает, что она существует в трехмерном (M = 3) трехподвижном ($П$ = 3) пространстве.

Ферма (рис. 2) имеет шесть звеньев (n = 6) из которых пять стержней и одна подвижная опора, девять кинематических пар $p = p_1$ = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9.

Следовательно, её число степеней свободы (подвижность) по структурным формулам (1) и (2) определится, соответственно: $W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 0$; $W = 9 - 3 \cdot 3 = 0$.

Из последних решений следует, что исследуемая ферма представляет собой статически определимую конструкцию, так как она имеет нулевую подвижность.

Проверим правильность структуры фермы с помощью структурных математических моделей.

Из рисунка 2 следует, что базовое звено фермы имеет три вершины (T = 3) и ферма имеет три независимых замкнутых контура ($k = p - n = 9 - 6 = 3$).

Независимым замкнутым контуром будем считать такой контур, который отличается от других контуров, по крайней мере, одним звеном или одной кинематической парой.

Контур образуется в результате мысленного проведения непрерывной линии по телам и кинематическим парам механической системы от одного присоединения к стойке или закрепления к звену к другим присоединениям и закреплениям с обязательным возвратом в исходное положение. Раскроем понятие независимого замкнутого контура k на примере развернутой фермы (рис. 2).

В исследуемой механической системе (рис. 2) можно мысленно провести много различных замкнутых контуров. Однако независимыми будут только три, например, контуры A1BC1AA1, B1BDCB1, ED1CC1AE. Видно, что в эти три контура вошли все шарниры и звенья исследуемой фермы.

Тогда, подставив все исходные данные в структурную математическую модель, например, (3), получим:

$$\begin{cases} 2 \cdot 9 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 = 18 \\ 6 = 6 \\ 0 = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0 \\ 3 = 3 \\ 9 = 9 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Так как все уравнения системы превратились в тождества, то, следовательно, ферма по рисунку 2 имеет правильную структуру, и она статически определимая конструкция.

Пример 2

Проведем структурный анализ и определим статическую определимость фермы, приведенной на рисунке 3.

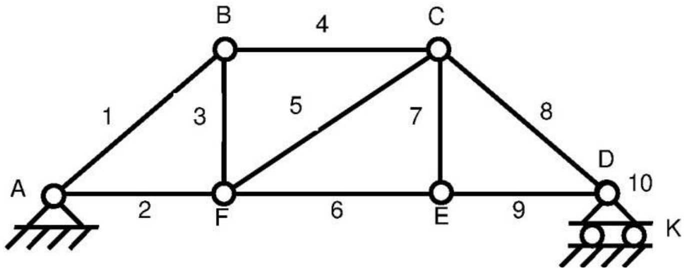

Рисунок 3 – Ферма

Анализ рисунка 3 показывает, что изображенная ферма не удобна для структурного анализа, так как сложно сразу определить число шарниров (кинематических пар) в узлах. Для подсчета шарниров в узлах воспользуемся формулой (5).

Из рисунка 3 видно, что узел A – опорный. Он состоит из двух (n = 2) стержней и имеет одно присоединение к стойке (S = 1). Тогда в соответствии с (3), в узле A находится две кинематические пары (p_1 = 2 – 1 + 1 = 2). В узлах B, D и E закреплены по три (n = 3, S = 0), следовательно, они в соответствии с (5.18) состоят из двух шарниров (p_1 = 2 – 1 + 0 = 2). В узлах C и F сходятся четыре (n = 4, S = 0) стержня, следовательно, они в соответствии с (5.18) состоят из трех шарниров (p_1 = 4 – 1 + 0 = 3). Итак, анализируемая ферма имеет десять звеньев (n = 10) и пятнадцать (p=p1=15), включая пару K, одноподвижных вращательных кинематических пар.

Анализ фермы (рис. 3) показывает, что она существует в трехмерном (M = 3) трехподвижном ($П$ = 3) пространстве.

Ферма имеет пять независимых замкнутых контуров ($k = p - n$ = 15 – 10 = 5).

Следовательно, ее число степеней свободы (подвижность), соответственно, определится: W = 3 · 10 – 2 · 15 = 0; W = 15 – 3 · 3 = 0.

Из последних решений следует, что исследуемая ферма представляет собой статически определимую конструкцию, так как она имеет нулевую подвижность.

Структурный анализ подвижных ферм

Пример 3

Проведем структурный анализ и определим статическую определимость поворотной фермы, приведенной на рисунке 4.

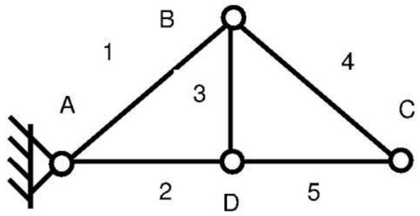

Рисунок 4 – Поворотная ферма

Из рисунка 4 видно, что ферма имеет одно присоединение к стойке (S = 1) в опорном узле А, к которому присоединены еще два (n = 2) стержня 1 и 2. Тогда, в соответствии с (5), в узле А находится две кинематические пары (p_1 = 2). В узлах B и D закреплены по три (n = 3, S = 0) стержня, следовательно, они в соответствии с (5) состоят из двух шарниров (p_1 = 2). В узле C сходятся два (n = 2, S = 0) стержня, следовательно, он в соответствии с (5) состоит из одного шарнира (p_1 = 1). Итак, анализируемая ферма имеет пять звеньев(n = 5) и семь одноподвижных вращательных кинематических пар ($p = p_1 = 7$).

Анализ фермы (рис. 4) показывает, что она существует в трехмерном (M = 3) трехподвижном ($П$ = 3) пространстве.

Ферма имеет два независимых замкнутых контура (k = 7 – 5 = 2).

Следовательно, ее подвижность, соответственно, определится: $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$; $W = 7 - 2 \cdot 3 = 1$.

Из последних решений следует, что исследуемая конструкция имеет одну степень свободы, то есть она подвижна. Эта степень свободы необходима для её поворота в шарнире А. Следовательно, сама ферма имеет нулевую подвижность и поэтому представляет собой статически определимую конструкцию.

Отметим, что найти подвижность поворотной фермы по рисунку 4 с помощью структурных формул (1) и (2) правильно удалось только потому, что поворот фермы осуществляется в том же пространстве, в котором существует и сама ферма.

Пример 4

Исследуем структуру и определим статическую определимость поворотной фермы, приведенной на рисунке 5.

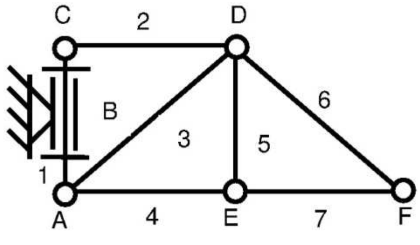

Рисунок 5 – Поворотная ферма

Анализ конструкции (рис. 5.29) показывает, что она состоит из фермы, которая существует в трехмерном (M = 3) трехподвижном пространстве ($П$ = 3), и шарнира В, который позволяет ферме вращаться вокруг оси, которая перпендикулярна осям шарниров фермы А, C, D, E и F. Следовательно кинематическая пара В существует в другом пространстве, а, именно, она существует в одномерном (M = 1) одноподвижном ($П$ = 1) пространстве [5, 6].

Так как исследуемая ферма существует в одном пространстве (в плоскости рисунка), а её вращение, с помощью звена закрепления 1, происходит в шарнире В, который существует в другом пространстве, то, в соответствии с [5, 6], в результате объединения двух устройств, существующих в разных пространствах получается сложная механическая система.

В [5, 6] показано, что подвижность сложных систем должна определяться по формуле (6), которая имеет вид:

$$W_{смс} = \sum_{i=1}^{n} W_i \ , \qquad (6)$$

где $W_{смс}$ – подвижность сложной механической системы; W_i - подвижность i-той простой механической системы, которая входит в состав сложной.

Из рисунка 5 следует, что исследуемая сложная механическая система состоит из двух простых систем:

- кривошипа 1, который является звеном закрепления,и вращательной кинематической пары В ($W_П$ = 1);
- фермы, состоящей из стержней 1–7 и шарниров А, С, D, Е и F($W_ф$ = 0).

Тогда в соответствии с (6) подвижность этой сложной механической системы определится:

$$W_{смс} = W_ф + W_П = 0 + 1 = 1. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что рассматриваемая конструкция является одноподвижной.

Анализ конструкции (рис. 5) показывает, что эта подвижность необходима для поворота конструкции вокруг шарнира В. Следовательно, сама поворачиваемая конструкция имеет нулевую подвижность и, поэтому, она является статически определимой фермой.

Структурный анализ безопорных ферм

Часто, проектировать, анализировать и синтезировать сложные фермы по заданным входным и выходным условиям удобнее, если рассматривать их ещё не присоединенными к опорам. Назовем такие фермы безопорными.

Безопорные фермы, чтобы правильно выполнять свою функцию, должны иметь соответствующую структуру и быть статически определимыми. Поэтому найдем структурные формулы для определения подвижности таких конструкций на этапе их разработки и расчета.

Полученная ранее структурная формула для любых механических систем (1) имеет вид:

$$W = Пn - \sum_{i=1}^{П-1} (П - i) p_i \ , \qquad (8)$$

Если ферму отсоединить от опор, то число её звеньев уменьшится на количество подвижных опор (m), на которые впоследствии будет устанавливаться безопорная ферма. С учетом, сказанного (8) примет вид:

$$W = П(n - m) - \sum_{i=1}^{П-1} (П - i) p_i \ . \qquad (9)$$

Полученное выражение (9) представляет собой структурную формулу для любых безопорных механических систем.

Раскроем скобки в (9):

$$W = Пn - Пm - П \sum_{i=1}^{П-1} p_i + \sum_{i=1}^{П-1} ip \, . \qquad (10)$$

Введем ранее принятые обозначения:

$$\sum_{i=1}^{П-1} p_i = p \, ; \qquad (11)$$

$$p - n = k\,, \qquad (12),$$

где k – число независимых замкнутых контуров.

Отметим, что смысловое понятие kдля механических систем и безопорных ферм немного не совпадает между собой и поэтому оно несёт в этом случае формальный характер.

С учетом (11) и (12) структурная формула (10) примет вид:

$$W = \sum_{i=1}^{\Pi-1} ip_i - \Pi k - \Pi m\,. \qquad (13)$$

Преобразуем (13), в результате получим:

$$W = \sum_{i=1}^{\Pi-1} ip_i - \Pi(k + m)\,. \qquad (14)$$

Выражение (14) является структурной формулой для любых безопорных механических систем, которые включают в себя и фермы.

Преобразуем (9) и (14) для широко распространенных напрактике двухопорных ферм, которые:

- имеют одну шарнирно неподвижную, а другую шарнирно подвижную опоры (m = 1);
- существуют в трехмерном (M = 3) трехподвижном (Π = 3) пространстве («плоские» фермы);
- имеют только одноподвижные кинематические пары (p_1).

$$W = 3(n - 1) - 2p_1\,; \qquad (15)$$

$$W = p_1 - 3(k + 1)\,. \qquad (16)$$

Заметим, что структурная формула (16), после подстановки в нее (12) превращается в формулу (15), а, следовательно, при анализе безопорных ферм нет необходимости определять число независимых замкнутых контуров.

Найдем с помощью структурной формулы (15) подвижность (число степеней свободы) широко распространенных на практике ферм.

Пример 5

Раскроем статическую определимость простейшей безопорной фермы, приведенной на рисунке 6.

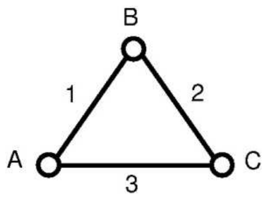

Рисунок 6 – Структурная схема безопорной фермы

Анализ рисунка 6показывает, что изображенная ферма не имеет опор, то есть представляет собой просто кинематическую цепь, которая не присоединена к стойкам (S = 0). Конструкция имеет три стержня (n = 3) и три (p_1 = 3) одноподвижные вращательные кинематические пары (шарнира).

Найдем подвижность этой конструкции, для чего воспользуемся структурной формулой (15) $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$.

Из решения следует, что исследуемая безопорная ферма, так как она имеет нулевую подвижность, представляет собой статически определимую конструкцию.

Пример 6

Найдем подвижность безопорной фермы, приведенной на рисунке 7.

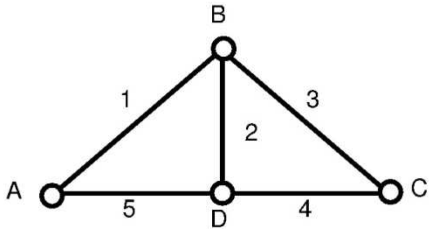

Рисунок 7 – Структурная схема безопорной фермы

Анализ фермы (рис. 7) показывает, что она существует в трехмерном (M = 3) трехподвижном ($П$ = 3) пространстве. Конструкция имеет пять (n = 5) звеньев и шесть ($p = p_1$ = 6) кинематических пар. Следовательно, ее число степеней свободы (подвижность) определится (15) $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$.

Из найденного решения следует, что исследуемая безопорная ферма представляет собой статически определимую конструкцию, так как она имеет нулевую подвижность. Аналогично, можно проводить структурный анализ любых ферм.

Пример 7

Найдем подвижность пространственной безопорной строительной конструкции (фермы), приведенной на рисунке 8.

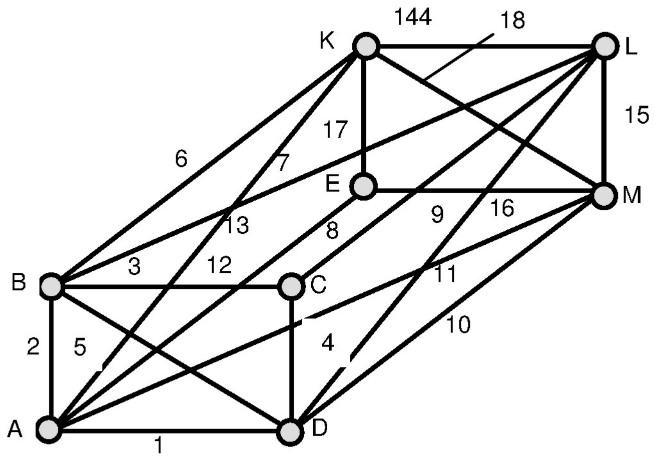

Рисунок 8 – Структурная схема безопорной фермы

Представленная на (рис. 8) конструкция, состоит из стержней, которые соединены между собой в узлах с помощью сферических кинематических пар (на рисунке сферические пары изображены в виде залитых серой краской окружностей).

Анализ конструкции (рис. 8) показывает, что она существует в трехмерном (M = 3) шестиподвижном ($П$ = 6) пространстве. На практике такие конструкции принято называть пространственными фермами.

Конструкция имеет восемнадцать (n = 18) звеньев и двадцать восемь ($p = p_3$ = 28) трёхподвижных сферических кинематических пар (шарниров).

Ферма имеет десять независимых замкнутых контуров $k = p - n = 28 - 18 = 10$.

Число степеней свободы (подвижность) этой конструкции, в соответствии с (9) и (14), соответственно, определится: $W = 6 \cdot 17 - 3 \cdot 28 = 18$; $W = 3 \cdot 28 - 6 \cdot 11 = 18$.

Из последних решений следует, что исследуемая безопорная конструкция имеет восемнадцать степеней свободы, следовательно, можно сделать вывод, что она подвижная. Однако е так. Анализ этих степеней свободы показывает, что они являются местными или избыточными степенями свободы. Эти степени свободы возникают из-за возможного вращения стержней вокруг своих осей. Известно [5, 6], что местные степени свободы не влияют на основную функцию механической системы, то есть они не делают конструкцию геометрически изменяемой, и поэтому их можно не устранять.

Итак, исследуемая безопорная конструкция является фермой, так как она имеет нулевую подвижность и представляет собой статически определимую конструкцию.

Структурный синтез ферм

Фермы являются разновидностью строительных конструкций, которые имеют широкое применения в практической деятельности человечества. Фермы, как и ранее рассмотренныестроительные конструкции можно синтезировать разными методами:

- интуитивно, опираясь на предыдущий опыт;
- целенаправленно с помощью наслоения структурных групп Ассура;
- с помощью структурных математических моделей.

Традиционно синтез ферм проводят в два этапа:

- определяют структуру будущего устройства (*структурный синтез*);
- по заданным силовым воздействиям определяют размеры его звеньев (*параметрический синтез*).

Задачей структурного синтеза является разработка структурной схемы будущей фермы по заданной статической определимости (подвижности), с учетом желаемых силовых характеристик.

В настоящее время структуру вновь проектируемых ферм, преимущественно, выбирают интуитивно, опираясь на опыт и квалификацию разработчиков. Такой подход обычно позволяет найти приемлемое решение. Однако такое решение не всегда рационально, поскольку невозможно проанализировать все возможные варианты исполнения.

В настоящем разделе рассматриваются и разрабатываются новые методы синтеза ферм.

Предлагаемые методы структурного синтеза конструкций основываются на применении структурных групп и структурных математических моделей [5,6].

Фермы, как и другие строительные конструкции, можно образовывать с помощью структурных групп. Покажем это.

Так если двухпроводковую структурную группу присоединить к балке, то в результате получим простейшую классическую трёхстержневую ферму (рис. 9).

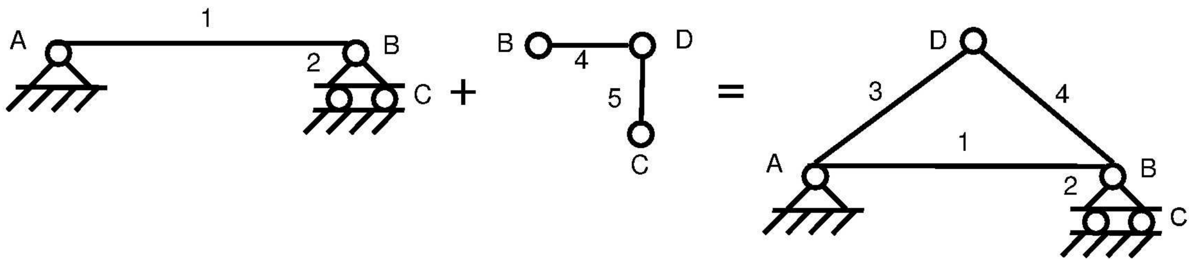

Рисунок 9 – Образование трёхстержневой фермы

Если к трехстержневой ферме (рис. 9) присоединитьдвухпроводковую структурную группу Ассура, то получим более сложную по конструкции ферму (рис. 10)

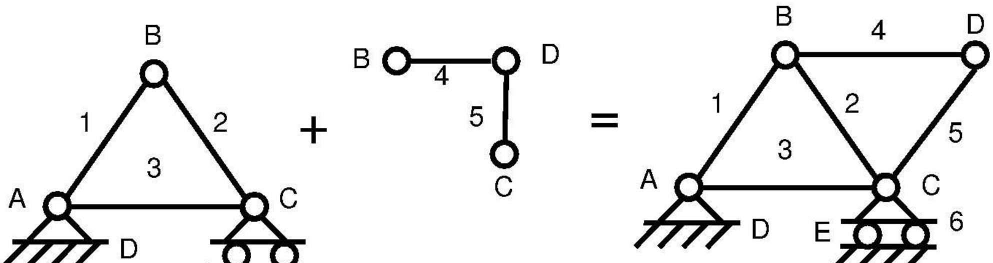

Рисунок 10 – Образование ферм

Продолжая присоединять двухповодковые структурные группы к ранее полученным фермам, получим фермы любой конфигурации, длины, высоты и сложности, например, (рис. 11).

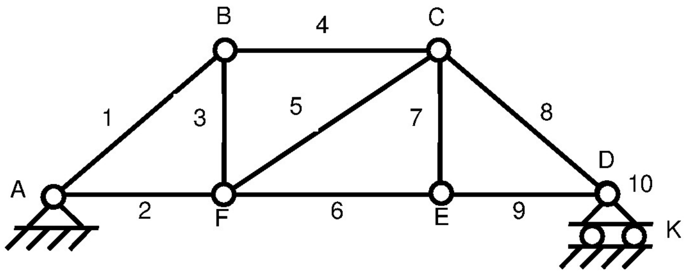

Рисунок 11 – Ферма

Теперь рассмотрим синтез ферм с помощью структурных математических моделей.

Разработанные раннее структурные математические модели (3) и (4) так же могут быть использованы и для структурного синтеза классических стержневых ферм.

Идея предлагаемого метода синтеза состоит в том, что, например, задаваясь:

- мерностью *M* и подвижностью пространства *П*, в котором будет существовать синтезируемая конструкция;
- подвижностью *W* или, что одно и тоже, статической определимостью, видом кинематических пар, которые будут использоваться при синтезе устройства;
- числом независимых контуров *k* или базовым звеном *T* или числом присоединений к стойке *S*;
- из решения систем (3) или (4) найдём количественный и видовой состав звеньев и кинематических пар, которые должна содержать проектируемая конструкция.

Затем путем перестановок кинематических пар и звеньев находим все возможные структурные схемы синтезируемых сооружений.

Рассмотрим практическую реализацию предлагаемого метода синтеза на конкретных примерах.

Синтезируем, например, статически определимые фермы, которые, соответственно, должны иметь нулевую подвижность (W = 0). Фермы должны существовать в трехподвижном ($П$ = 3) пространстве и иметь только одноподвижные кинематические пары ($p = p_1$).

Подставив исходные данные в структурную математическую модель, например, (3), получим:

$$\begin{cases} 2p_1 = \sum_{t=T-j}^{2} tn_t + S \\ n = \sum_{t=T-j}^{2} n_t \\ 0 = p_1 - 3k \\ k = p_1 - n \\ p = p_1 \\ T \leq k + 1 \end{cases} \quad (17)$$

Так как число кинематических пар (шарниров) и стержней в любой ферме может быть только целым числом, то найдем возможные целочисленные решения системы (17), например, для числа независимых замкнутых контуров k = 1, 2, 3.

Для удобства дальнейшего анализа структурных моделей, целочисленные решения третьего, четвертого, пятого уравнений и шестого неравенства (17), сведем в таблице 1.

Учитывая ранее сформулированные начальные условия ($П$ = 3, W = 0, $p = p_1$) и найденные решения (табл. 1), приступим к синтезу ферм.

Синтезируем фермы, соответствующие решениям первого столбца таблицы 1.

Из таблицы 1 видно, что все звенья ферм, включая и базовое, будут двухвершинными, то есть T = 2. С учетом этих исходных данных первое и второе уравнения системы (17) примут вид:

$$\begin{cases} 6 = 2n_2 + S \\ n = n_2 = 2 \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) следует, что синтезируемая ферма должна иметь два присоединения к стойке (S = 2).

Таблица 1 – Целочисленные решения структурной модели

k	1	2	3
$p = p_1$	3	6	9
n	2	4	6
T≤	2	3	4
k	1	2	3
$p = p_1$	3	6	9
n	2	4	6
T≤	2	3	4

Найденным решениям соответствует только одна конструкция – стропило (рис. 12).

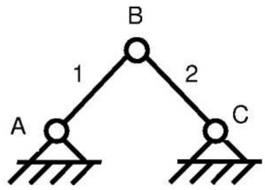

Рисунок 12 – Стропило

Синтезируем фермы, соответствующие решениям второго столбца таблицы 1.

Из таблицы 1 видно, что базовое и все остальные звенья у этих ферм могут быть как двух ($T = 2$), так и трехвершинными ($T = 3$).

С учетом этих исходных данных первое и второе уравнения системы (17) примут вид:

$$\begin{cases} 12 = 3n_3 + 2n_2 + S \\ 4 = n_3 + n_2 \end{cases}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что система может иметь несколько различных решений. Найдем эти решения.

Сначала примем, что синтезируемое устройство должно иметь два присоединения к стойке ($S = 2$).

С учетом, что $S = 2$ система (19) примет вид:

$$\begin{cases} 10 = 3n_3 + 2n_2 \\ 4 = n_3 + n_2 \end{cases}. \quad (20)$$

Видно, что система (20) имеет одно решение ($n_3 = 2$, $n_2 = 2$).

Значит, конструкция будет иметь в своём составе по два двух ($n_2 = 2$) и трехвершинных ($n_3 = 2$) звена.

Собрать из набора таких звеньев стержневую ферму не возможно, но реализовать строительную конструкцию,соответствующую этим решениям можно (рис. 13).

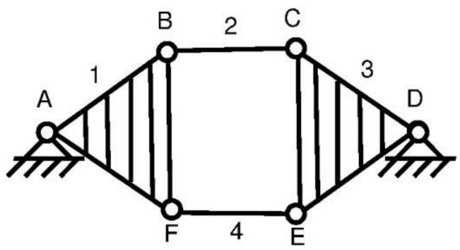

Рисунок 13 – Синтезированная конструкция

Из рисунка 13 видно, что синтезированная конструкция есть не что иное, как присоединенная к стойкам структурная группа Ассура.

Теперь примем, что синтезируемое устройство должно иметь три присоединения к стойке ($S = 3$).

С учетом, что S = 3 система (19) примет вид:

$$\begin{cases} 9 = 3n_3 + 2n_2 \\ 4 = n_3 + n_2 \end{cases}. \qquad (21)$$

Видно, что система (21) имеет одно решение (n_3 = 1, n_2 = 3).

То есть конструкция будет иметь в своём составе одно трехвершинное (n_3 = 1) звено и три двухвершинных (n_2 = 3) звена.

Строительная конструкция, соответствующая этим решениям имеет вид (рис. 14).

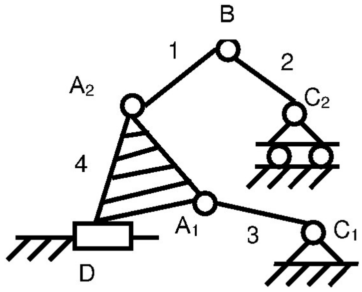

Рисунок 14 – Синтезированная конструкция

Синтезированная конструкция путем соосного совмещения шарниров (кинематических пар) может быть преобразована в простейшую ферму (рис. 15).

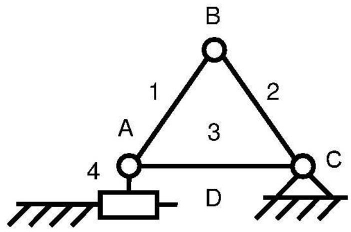

Рисунок 15 – Синтезированная ферма

Синтезируем фермы, соответствующие решениям третьего столбца таблицы 1.

Из решений следует, что базовое и все остальные звенья у этих ферм могут быть как двух (T = 2), трехвершинными (T = 3) так и четырёхвершинными (T = 4). С учетом этих исходных данных первое и второе уравнения системы (17) примут вид:

$$\begin{cases} 18 = 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + S \\ 6 = n_4 + n_3 + n_2 \end{cases}. \qquad (22)$$

Из (22) следует, что система может иметь несколько различных решений. Найдем эти решения.

Для начала примем, что синтезируемое устройство должно иметь два присоединения к стойке (S = 2).

С учетом, что S = 2 система (22) примет вид:

$$\begin{cases} 16 = 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 \\ 6 = n_4 + n_3 + n_2 \end{cases}. \qquad (23)$$

Видно, что система (5.23) имеет два решения: n_4 = 1, n_3 = 2, n_2 = 3; n_4 = 0, n_3 = 4, n_2 = 2.

Как следует из последних решений, эти конструкции будут иметь в своём составе, соответственно:

- одно четырёхвершинное (n_4 = 1), два трехвершинных (n_3 = 2), и три двухвершинных (n_2 = 3) звена;
- четыре трехвершинных (n_3 = 4) и два двухвершинных (n_3 = 2) звена.

Строительные конструкции, соотвествующие этим решениям приведены, соответственно на рисунке 16 а, б.

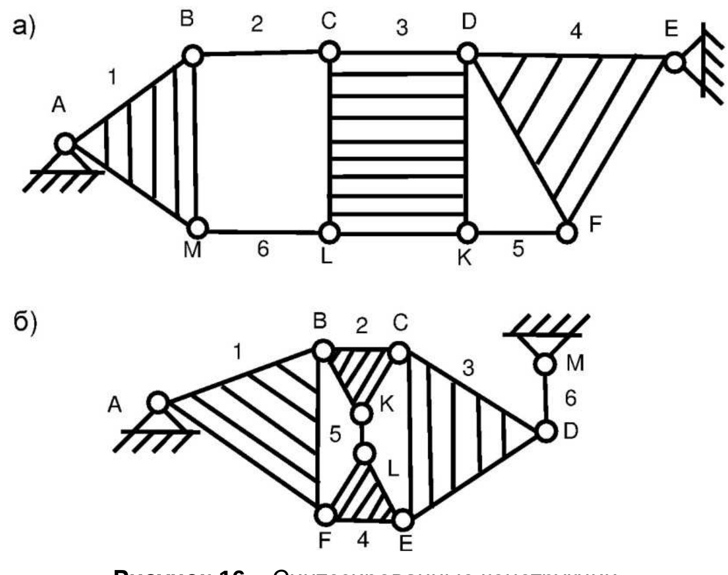

Рисунок 16 – Синтезированные конструкции

Из рисунка 16 видно, что скомпоновать из набора таких звеньев стержневые фермы не возможно.

Теперь примем, что синтезируемое устройство должно иметь три присоединения к стойке (S = 3).

С учетом, что S = 3 система (17) примет вид:

$$\begin{cases} 15 = 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 \\ 6 = n_4 + n_3 + n_2 \end{cases}. \qquad (24)$$

Видно, что система (24) имеет два решения: n_4 = 1, n_3 = 1, n_2 = 4; n_4 = 0, n_3 = 3, n_2 = 3.

Как следует из последних решений, эти конструкции будут иметь в своём составе, соответственно:

- одно четырёхвершинное (n_4 = 1), одно трехвершинное (n_3 = 1) и четыре двухвершинных (n_2 = 4) звена;
- три трехвершинных (n_3 = 3) и три двухвершинных (n_2 = 3) звена.

Строительные конструкции, соответствующие этим решениям приведены, соответственно на рисунке 17 а, б.

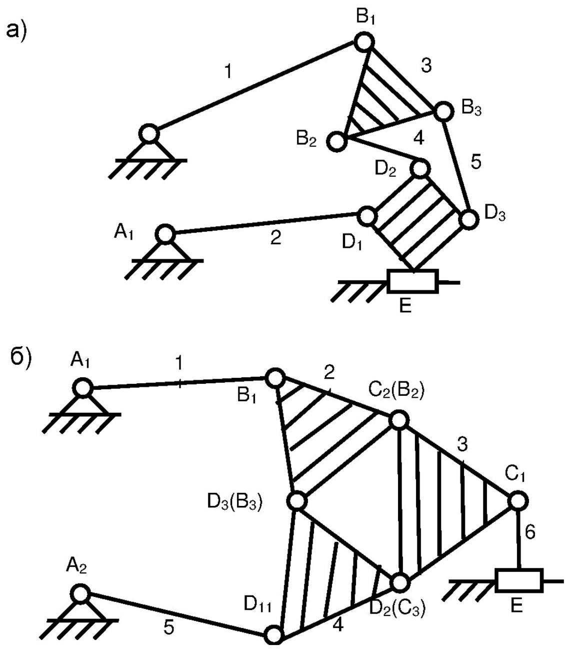

Рисунок 17 – Синтезированные конструкции

Представленные конструкции путем соосного совмещения шарниров (кинематических пар) можно преобразовать, соответственно, в фермы (рис.18 а, б).

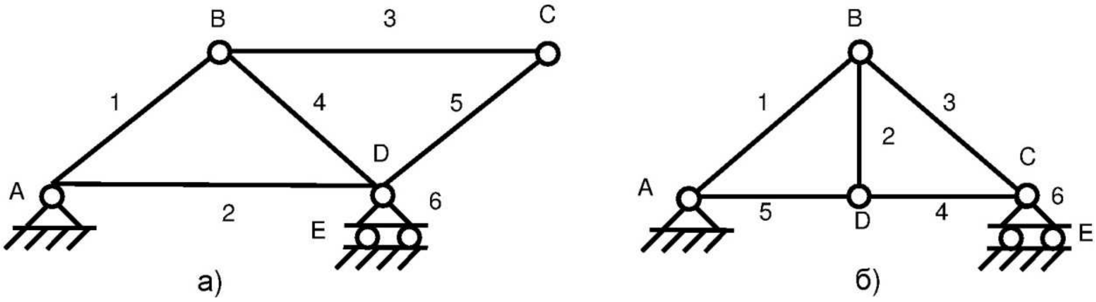

Рисунок 18 – Синтезированные фермы

Примем, что синтезируемое устройство должно иметь четыре присоединения к стойке (S = 4).

С учетом, что S = 4 система (17) примет вид:

$$\begin{cases} 14 = 4n_4 + 3n_3 + 2n_2 \\ 6 = n_4 + n_3 + n_2 \end{cases}. \tag{25}$$

Видно, что система (25) имеет два решения: n_4 = 1, n_3 = 0, n_2 = 5; n_4 = 0, n_3 = 2, n_2 = 4.

Как следует из последних решений, эти конструкции будут иметь в своём составе, соответственно:

- одно четырёхвершинное (n_4 = 1), и пять двухвершинных (n_2 = 5) звена;
- два трехвершинных (n_3 = 2) и четыре двухвершинных и четыре двухвершинных (n_2 = 4) звена.

Строительные конструкции, соответствующие этим решениям приведены, соответственно на рисунке 19 а, б.

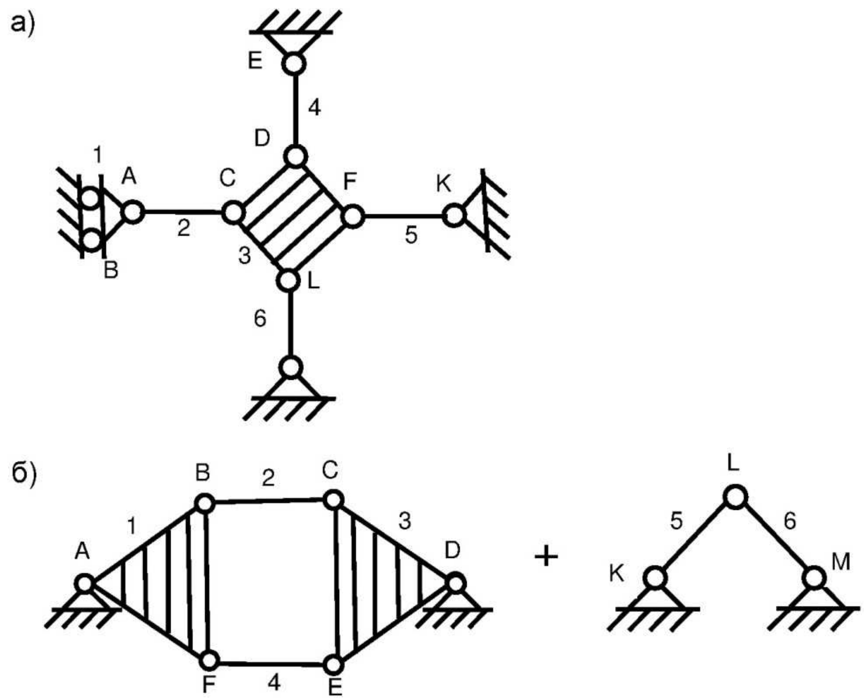

Рисунок 19 – Синтезированные конструкции

Из рисунка 19 следует, что скомпоновать из набора таких звеньев стержневую ферму не возможно.

Анализ конструкции по рисунку 19 б показывает, что при наличии в этой конструкции только трех и двухподвижных звеньев не удается обеспечить в одном устройстве более двух присоединений к стойке.

На первый взгляд, кажется, что теория расходится с практикой. Однако это не так. Дело в том, что теоретически, да и практически, механизм, изображенный на рисунке 19 б, можно развивать до бесконечности, если последовательно присоединять к его стойке кинематическую цепь, представляющую собой двухповодковую структурную группу. Видно, что эта цепь соответствует найденным выше решениям и представляет собой стропило. Присоединение любого числа таких устройств к другим конструкциям не влияет на его подвижность и не меняет его структуру. Это решение и дает математическая модель. Понятно, что на практике реализация таких конструкций бессмысленна, но теоретически это возможно. Поэтому, несмотря на то, что полученные решения приводят к многозначности решения, для практики смысл имеет только одна структурная схема, которая изображена на рисунке 19 а.

Выводы

Применяя предлагаемые методы структурного анализа и синтеза можно:

- машины, механизмы и строительные конструкции не изобретать, а целенаправленно создавать;
- используя научные методы и алгоритмы целенаправленно синтезировать и анализировать любые строительные конструкции;
- найти все многообразие возможных конструкций, отвечающих начальным условиям синтеза и зная все эти структуры, выбрать лучшую из них для практического применения.

Литература:

1. Киселев В. А. Строительная механика : учебник для вузов. – М. : Стройиздат, 1976. – Изд. 3-е, доп. – 511 с.
2. Кривошапко С.Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно- графические работы : учеб. пособие. – М. : Высшая школа, 2008. – 391 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М. : Высшая школа, 1990. – 608 с.
4. Себешев В.Г. Кинематический анализ сооружений : учеб. пособие. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 58 с.
5. Смелягин А.И. Структура механизмов и машин : учебное пособие. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – 286 с.
6. Смелягин А.И. Структура механизмов и машин. – М. : Высшая школа, 2006. – 304 с.
7. Смелягин А.И. Статическая определимость механических систем. Механика технических систем / Труды научных школ НГТУ. – Новосибирск, 2008. – С. 120–127.
8. Смелягин А.И. Структурный анализ ферм. Проблемы динамики и прочности исполнительных механизмов и машин / Матер. 3-й конф; АГТУ. – Астрахань, 2007. – С. 163–164.
9. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин : Курсовое проектирование. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 263 с.
10. Смелягин А.И. Структурный анализ ферм / Доклады IV Всероссийского совещания семинара заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов Российской Федерации. – Новочеркасск : ЮРГТУ, 2010. – С. 217–220.
11. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование : учебное пособие. – М. : ИНФРА-М, 2015. – 263 с.
12. Снитко Н.К. Строительная механика : учебник для вузов. – М. : Высшая школа, 1980. – Изд. 3-е, доп. – 431 с.
13. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / под ред. А.Е. Саргсяна. – М. : Высшая школа, 2000. – 2-е изд., испр. и доп. – 416 с.

References:

1. Kiselyov V.A. Construction mechanics : the textbook for higher education institutions. – M. : Stroyizdat, 1976. – Prod. the 3rd, additional – 511 p.
2. Krivoshapko S.N. Construction mechanics: lectures, seminars, settlement graphic works : studies. grant. – M. : The higher school, 2008. – 391 p.
3. Nikitin N.N. Course of theoretical mechanics. – M. : The higher school, 1990. – 608 p.
4. Sebeshev V.G. Kinematic analysis of constructions : studies. grant. – Novosibirsk : NGA-SU (Sibstrin), 2006. – 58 p.

5. Smelyagin A.I. Structure of mechanisms and machines : manual. – Novosibirsk : NGTU publishing house, 2001. – 286 p.
6. Smelyagin A.I. Structure of mechanisms and machines. – M. : The higher school, 2006. – 304 p.
7. Smelyagin A.I. Static definability of mechanical systems. Mechanics of technical systems / Works of schools of sciences of NGTU. – Novosibirsk, 2008. – P. 120–127.
8. Smelyagin A.I. Structural analysis of farms. Problems of dynamics and durability of actuators and cars / Mater. the 3rd conference; AGTU. – Astrakhan, 2007. – P. 163–164.
9. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines : Course design. – M. : INFRA-M, 2009. – 263 p.
10. Smelyagin A.I. Structural analysis farms / Reports of the IV All-Russian meeting of a seminar of managers of departments and leading teachers of theoretical mechanics of higher education institutions of the Russian Federation. – Novocherkassk : YuRGTU, 2010. – P. 217–220.
11. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines. Course design : educational grant. – M. : INFRA-M, 2015. – 263 p.
12. Snitko N.K. Construction mechanics : the textbook for higher education institutions. – M. : The higher school, 1980. – Prod. the 3rd, additional – 431 p.
13. Construction mechanics. Theory bases with examples of calculations: the textbook / under the editorship of A.E. Sargsyan. – M. : The higher school, 2000. – the 2nd prod., corrected and additional – 416 p.