УДК 004.921, 519.61

О ВИЗУАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОИСКА МАТРИЦ АДАМАРА

ON VISUAL ASSESSMENT OF THE RESULTS OF HADAMARD MATRICES SEARCH

Куртяник Даниил Владимирович
старший преподаватель,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
dvk88@yandex.ru

Сергеев Александр Михайлович
старший преподаватель,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
mbse@mail.ru

Самиков Алексей Вячеславович
Магистрант,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
samikovZ6440M@yandex.ru

Семенов Александр Александрович
Магистрант,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
semenovZ6440M@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы анализа результатов поиска ортогональных матриц, связанные с их представлением в аналитической, графической и табличной формах. Выделяется визуальное представление матриц в виде их «портретов» как наиболее эффективное сегодня для анализа и классификации. Ставится задача программного анализа матриц высоких порядков как альтернатива визуального анализа.

Ключевые слова: матрицы Адамара, матрицы Мерсенна, ортогональные матрицы, квазиортогональные матрицы, симметричные матрицы, портреты матриц.

Kurtianik Daniil Vladimirovich
Senior lecturer,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
dvk88@yandex.ru

Sergeev Alexander Mikhailovich
Senior lecturer,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
mbse@mail.ru

Samikov Aleksei Viacheslavovich
Masters student,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
samikovZ6440M@yandex.ru

Semenov Alexander Alexanderovich
Masters student,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
semenovZ6440M@yandex.ru

Annotation. The questions of analysis of search results of orthogonal matrices connected with their representation in analytical, graphic and tabular forms are considered. Visual representation of matrices in the form of their "portraits" as the most effective today for the analysis and classification is selected. The task of the program analysis of high orders matrices as an alternative of the visual analysis is set.

Keywords: Hadamard matrices, Mersenne matrices, orthogonal matrices, quasi-orthogonal matrices, symmetric matrices, matrices portraits.

Введение

В практике решения задач, связанных с обработкой, кодированием и передачей информации, широкое распространение получили методы, использующие ортогональные преобразования [1–7].

Преимущество таких преобразований заключается в том, что они симметричны. Прямое преобразование выполняется с матрицей A, а обратное – с матрицей A^T, поскольку $A^T A = I$, где $I = diag\{1,1,1,\ldots,1\}$.

Известно, что количество ортогональных матриц, если не вводить ограничений на количество значений их коэффициентов и порядки, бесконечно. Введение ряда ограничений и условий приводит к различным классификациям, например, такой, какая представлена в работе [8].

Однако, на практике наиболее известными ортогональными матрицами являются матрицы Адамара H_n [9] с двумя целочисленными элементами 1 и –1 порядков $n = 4t$, где t – натуральное число, для которых справедливо равенство $H_n^T H_n = nI$. Два значения элементов 1 и –1 обеспечивают простоту выполнения матричного умножения, сводя его к операциям сложения и вычитания (без округлений).

В свою очередь, наиболее востребованными среди матриц Адамара являются матрицы симметричных структур, что обеспечивает экономичное их хранение в памяти и эффективное выполнение операций с ними [5].

Получить симметричные матрицы малых порядков можно известными методами Пэли, Сильвестра и Вильямсона [10–12], в том числе в виде конструкции Пропус [13].

Однако при поиске ортогональных матриц высоких порядков используются переборные методы, методы случайной генерации ортогональных последовательностей с последующей фильтрацией на предмет пригодности для построения ортогональной матрицы [14, 15], либо итерационная оптимизационная процедура [16, 17]. Получаемые с их помощью матрицы проверяются на ортогональность и, если они ортогональны, анализируются их структуры на соответствие классификационным признакам.

Оценка полученной ортогональной матрицы как результата поиска на принадлежность ее к симметричным, антисимметричным, блочно-симметричным, симметричным и антисимметричным циклическим или другим регулярным структурам может производиться как вручную (по визуальному представлению), так и программно.

В настоящей работе анализируются особенности визуального представления и анализа структур ортогональных матриц.

Способы представления ортогональных матриц Адамара

Для представления (описания) матриц Адамара существует ряд способов, наиболее распространенными из которых являются, во-первых, табличный (естественный), в котором матрица состоит из «1» и «–1» или «+» и «–», соответствующих значениям элементов 1 и –1. Пример таких представлений матрицы порядка 8 приведен на рисунке 1.

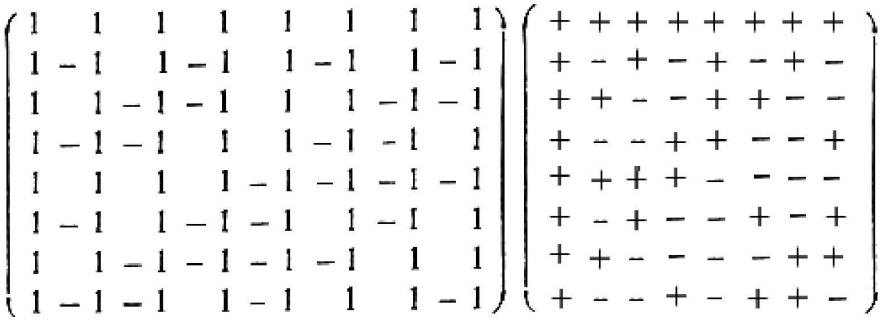

Рисунок 1 – Табличное представление матрицы Адамара

Во-вторых, дизайн матрицы Адамара может быть описан с использованием триады чисел в виде сбалансированного неполного блочного дизайна (a balanced incomplete block design) BIBD(v; k; λ) или комплементарного дизайна SBIBD(v; k; λ) [18]. В общем случае орнамент квадратной матрицы с двумя значениями элементов вполне описывается тремя инвариантами {n, k, λ}, где n – порядок матрицы, характеризующий размер узора, k – количество одинаковых элементов каждой строки матрицы, λ – количество одинаковых элементов, имеющих одну и ту же позицию в каждой паре строк матрицы. Однако такое описание может соответствовать нескольким различным структурам матрицы порядка n. Для примера в работе [19] рассмотрены две матрицы Мерсенна [8] порядка 15 с одинаковыми инвариантами {15, 7, 3}. Каждая из них имеет по 7 одинаковых клеток в каждой строке и по 3 – в каждой паре строк.

Приведенные способы могут использоваться не только для описания вычисленных матриц Адамара, но и для получения матриц более высокого порядка путем замещения внедиагональных клеток кососимметрических матриц порядка Сильвестра 2t [20]. Однако наиболее приемлемо такое описание для циклических и бициклических матриц и не распространяется на матрицы с общей симметрией или полученных перебором или случайной генерацией.

В-третьих, *портретами* матриц в виде совокупности клеток двух цветов (чаще, черного и белого), соответствующих двум значениям элементов матриц. Одним из

первых «портретов» блочно-симметричных матриц можно считать представленное на рисунке 2 изображение уникальной (на тот момент времени) матрицы порядка 92 в руках вычисливших ее Голомба (Golomb), Баумерта (Baumert) и Холла (Hall). Не смотря на то, что портрет, с целью выделения блочной структуры матрицы, цветной, каждый модуль – двухцветный.·

Рисунок 2 – Один из первых «портретов» матрицы
с выделенными одинаковым цветом симметричными блоками [19]

Позже идею представления матриц их портретами для удобства анализа структур, их классификации и учета высказала профессор Дж. Себерри [21]. С ее участием с 2012 г. на сайте mathscinet.ru [20] формируются портретные библиотеки матриц Адамара и других ортогональных и экстремальных матриц.

Пример представления симметричных матриц Адамара порядка 16, полученной методом Пэли [10], и матрицы вдвое большего порядка в виде двухцветных портретов приведен на рисунке 3. На рисунке 4 приведены портреты матриц с одинаковым дизайном {15, 7, 3}, но различные по структуре [19].

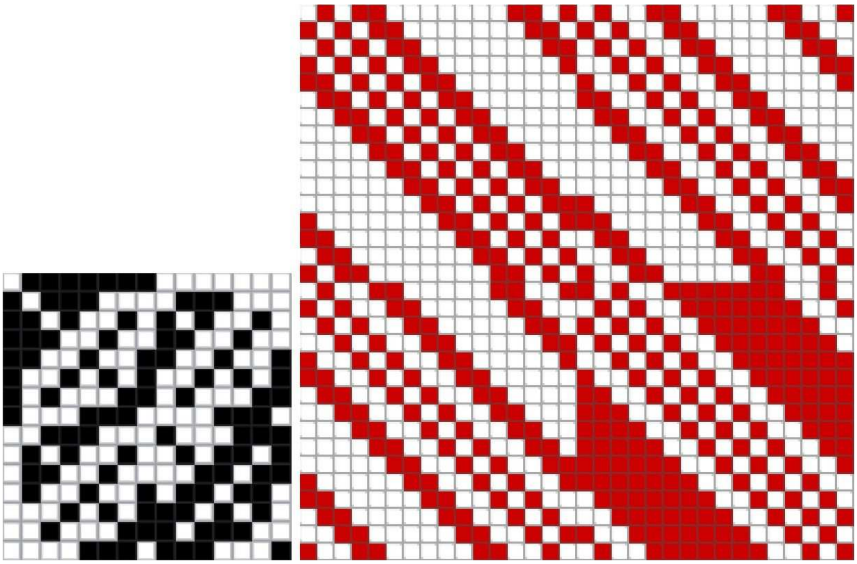

Рисунок 3 – Портреты симметричных матриц H16 и H32 [20]

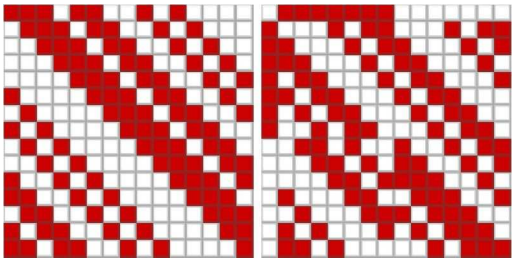

Рисунок 4 – Две матрицы Мерсенна с дизайном {15, 7, 3} [19]

Визуализация – лучший ли способ анализа результатов генерации ортогональных матриц?

Вопросам визуализации в математике, в том числе визуализации матриц, посвящено огромное количество работ и отражающих их результаты современных публикаций – материалов конференций, статей, книг [22–26].

Для оценки применимости визуализации к результатам поиска ортогональных матриц следует ответить на несколько важных вопросов.

1. Для чего нужен анализ вычисленных (найденных) матриц Адамара?

Он необходим для определения конструкции матрицы, отнесения ее к одному из видов, предсказания существования последовательностей матриц [27], поиска уникальных матриц по прецедентным матрицам [28]. Важны результаты анализа и для задания начальных условий в оптимизационных процедурах поиска матриц и при поиске матриц с привлечением динамических генераторов [15]. Особую значимость визуальный анализ приобретает при случайном поиске ортогональных матриц Адамара.

2. Для каких порядков оправдано портретное представление матриц для визуального анализа?

Очевидно, что представление матриц их портретами для визуального анализа оправдано лишь для небольших порядков n. С ростом порядков матриц Адамара (более порядка 400) портретное представление становится трудно анализируемым, ввиду значительного уменьшения размеров клеток портрета.

В качестве примера на рисунке 5 приведен портрет матрицы Адамара порядка 428 с практически не различимыми клетками.

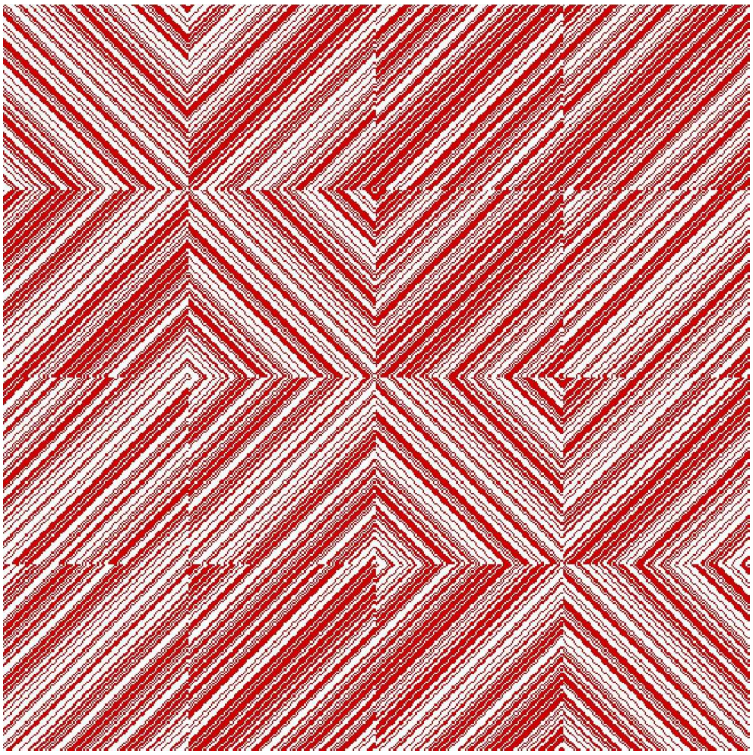

Рисунок 5 – Портрет матрицы Адамара порядка 428 [20]

3. Насколько результативен визуальный анализ?

Зрительный аппарат человека – один из важнейших каналов получения информации об объектах окружающей среды. Из всех органов чувств человека зрительный аппарат является лучшим аналитическим, ассоциативным каналом, обеспечивающим логический анализ, быстрое распознавание, выделение и идентификацию конструкций, особенно симметрий. В качестве примера на рисунке 6 приведена матрица Ферма с двумя значениями элементов со сложной симметрией, которая определяется при визуальном анализе, – здесь и симметрия, и антисимметрия, и блочная симметрия.

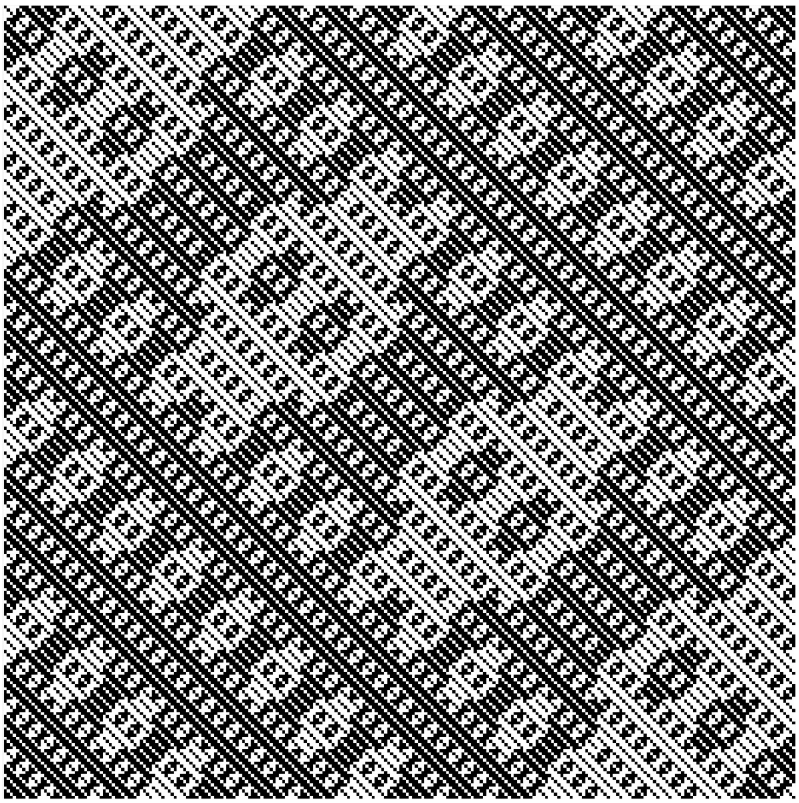

Рисунок 6 – Матрица Адамара-Ферма порядка 257 [29]

Однако, как показывает анализ материалов последних исследований в области поиска матриц [30], анализ портретов орнаментальных матриц H^TH является наиболее эффективной формой проверки ортогональности. А при поиске бициклических матриц, являющихся результатом вычисления двух циклических матриц A и B – индикатором получения заведомо симметричной матрицы. Таким образом, переход к анализу портрета орнаментальной матрицы еще один способ визуального распознавания ортогональности и симметрий.

4. Будет ли результативен анализ портретов ортогональных матриц с тремя и более значениями элементов?

Поскольку классов ортогональных матриц гораздо больше, чем матриц Адамара, при введении ограничений на количество значений элементов матриц (основное ограничение при вычислении квазиортогональных матриц Мерсенна, Эйлера, Ферма и др.) требуется большее число цветовых элементов на портретах этих матриц. В этом случае визуально оценить наличие симметрий становится значительно сложнее.

Ответы на сформулированные выше вопросы показывают, что визуальный анализ на современном этапе развития поисковых алгоритмов, позволяющих находить матрицы Адамара и другие ортогональные (квазиортогональные) матрицы, является весьма эффективным. Однако с ростом верхней границы порядков n находимых матриц Адамара компьютерная оценка станет более предпочтительной, поскольку с ростом порядка значительно возрастает количество матриц каждого порядка и уменьшается различимость клеток портрета.

Заключение

Распространению портретного представления матриц способствовала визуализация результата поиска М. Холла с коллегами. Именно матричные портреты в значительной степени способствовали развитию работ по поиску матриц Адамара с различными симметриями, завершившихся формированием библиотек найденных матриц различных порядков первой сотни с различными симметриями.

Матричные портреты находимых матриц Адамара возрастающих порядков часто уже не позволяет анализировать их структуры визуально и требуют новых подходов, ориентированных на программную реализацию.

Способность программного распознавания наличия симметрий, в том числе сложных, не вызывает сомнений, однако универсальный алгоритм такого распознавания на сегодня, во-первых, отсутствует, а, во-вторых, есть необходимость программного выделения и анализа симметрий блочных (многоблочных) структур. В-третьих, при разработке программного обеспечения следует ориентироваться на анализ симметрий в матрицах с тремя и более значениями элементов.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ при проведении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2.2200.2017/4.6

Литература:

1. Horadam K.J. Hadamard matrices and their applications. – Princeton, NJ : Princeton University Press, 2007. – 278 p.
2. Haralambos E. Applications of Hadamard matrices // Journal of Telecommunications and Information Technology. – 2003. – P. 3–10.
3. Seberry J. et al. On some applications of Hadamard matrices // Metrika. – 2005. – № 62 (2–3). – P. 221–239.
4. Balonin N., Sergeev M. Expansion of the Orthogonal Basis in Video Compression // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – 2014. – Vol. 262. – P. 468–474. – DOI: 10.3233/978-1-61499-405-3-468
5. Сергеев А.М., Блаунштейн Н.Ш. Ортогональные матрицы симметричных структур для задач обработки изображений // Информационно-управляющие системы. – 2017. – № 6 (91). – С. 2–8.
6. Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Expansion of the Quasy-Orthogonal Basis to Mask Images // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2015. – Vol. 40. – P. 161–168.
7. Balonin N.A., Sergeev M.B. Construction of Transformation Basis for Video and Image Masking Procedures // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – 2014. – Vol. 262. – P. 462–467.
8. Сергеев А.М. Обобщенные матрицы Мерсенна и гипотеза Балонина // Автоматика и вычислительная техника. – 2014. – № 4. – С. 35–43.
9. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1893. – Vol. 17. – P. 240–246.
10. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices // Journal of Mathematics and Physics. – 1933. – Vol. 12. – P. 311–320.
11. Sylvester J.J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers // Philosophical Magazine. – 1867. – Vol. 34. – P. 461–475.
12. Williamson J. Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares // Duke Math. J. – 1944. – № 11. – P. 65–81.
13. Балонин Н.А, Сергеев М.Б. Матрицы Пропус 92 и 116 // Информационно-управляющие системы. – 2016. – № 2. – С. 101–103. – DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.101
14. Балонин Ю.Н., Клюковкин В.Р., Сергеев А.М. Численный алгоритм эффективного поиска бициклических матриц на основе таблицы перекрестных ссылок / Научная сессия ГУАП : сб. докл. в 3 частях. – СПб. : ГУАП. СПб., 2017. – Ч. II: Технические науки. – С. 179–184.
15. Балонин Н.А., Сергеев М.Б., Суздаль В.С. Динамические генераторы квазиортогональных матриц семейства Адамара // Труды СПИИРАН. – 2017. – Вып. 5 (54). – С. 224–243.
16. Балонин Ю.Н., Сергеев М.Б. Алгоритм и программа поиска и исследования М-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 3. – С. 82–86.

17. Балонин Ю.Н. Программный комплекс MMatrix-2 и найденные им М-матрицы // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2013. – № 10 (112). – С. 58–64.

18. Seberry J. and Yamada M. Hadamard matrices, Sequences, and Block Designs, An Existence Theorem for Hadamard Designs, Lemma 4.8, Cases 1, 2. – P. 461.

19. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Расширение гипотезы Райзера на двуциклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой // Информационно-управляющие системы. – 2017. – № 1 (86). – С. 2–10. – DOI: 10.15217/issn1684-8853.2017.1.2

20. Матрицы Адамара. Матрица Адамара 428. / MATH NOTEBOOK. – URL : http://www.mathscinet.ru (дата обращения: 02.12.18).

21. Jenny Seberry suggests we create a gallery of maths pictures / MATH NOTEBOOK. – URL : http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf (дата обращения : 02.12.18).

22. Mathematical foundations of scientific visualization, computer graphics, and massive data exploration / Edit. Möller T., Hamann B., Russell R. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – P. 350. – DOI: 10.1007/978-3-540-49926-8

23. Wu H.-M., Tzeng S., Chen C. Matrix Visualization. In: Handbook of Data Visualization. Springer Handbooks Comp. Statistics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. – P. 681–708. – DOI: 10.1007/978-3-540-33037-0_26

24. Interactive visualization of connections between cells in a matrix / Stack Overflow-Where Developers Learn, Share, & Build Careers. – URL : https://stackoverflow.com/questions/10418236/interactive-visualization-of-connections-between-cells-in-a-matrix (дата обращения : 02.12.18).

25. Introduction to Matrix Visualization / Naseem's IdeaLog – My blog on technology and the world at large as well as code in detail. – URL : https://mdnaseemashraf.wordpress.com/2015/07/06/introduction-to-matrix-visualization/ (дата обращения : 02.12.18)

26. Judy-Anne Osborn. Visualizing Maximal Determinant Matrices / EViMS: Workshop on the Effective Use of Visualization in the Mathematical Sciences 23–25 November, 2012. – URL : https://carma.newcastle.edu.au/meetings/evims/ (дата обращения : 02.12.18).

27. Сергеев А.М. О взаимосвязи одного вида квазиортогональных матриц, построенных на порядках последовательностей 4k и 4k-1 // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2017. – № 7. – С. 12–17.

28. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Two-Circulant Golden Ratio Matrices // Информационно-управляющие системы. – 2014. – № 5. – С. 5–11.

29. Балонин Н.А., Сергеев М.Б., Мироновский Л.А. Вычисление матриц Адамара-Ферма // Информационно-управляющие системы. – 2012. – № 6. – С. 90–93.

30. Топорков М.А. Изучение орнаментальной матрицы $N = H^T H$ в задачах максимума детерминанта // Семидесятая международная студенческая научная конференция ГУАП : сб. докл. в 4 частях. – СПб. : ГУАП. СПб., 2017. – С. 207–211.

References:

1. Horadam K.J. Hadamard matrices and their applications. – Princeton, NJ : Princeton University Press, 2007. – 278 p.

2. Haralambos E. Applications of Hadamard matrices // Journal of Telecommunications and Information Technology. – 2003. – P. 3–10.

3. Seberry J. et al. On some applications of Hadamard matrices // Metrika. – 2005. – № 62 (2–3). – P. 221–239.

4. Balonin N., Sergeev M. Expansion of the Orthogonal Basis in Video Compression // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – 2014. – Vol. 262. – P. 468–474. – DOI: 10.3233/978-1-61499-405-3-468

5. Sergeyev A.M., Blaunstein N.Sh. Orthogonal matrixes of symmetric structures for problems of processing of images // Management information systems. – 2017. – № 6 (91). – P. 2–8.

6. Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Expansion of the Quasy-Orthogonal Basis to Mask Images // Smart Innovation, Systems and Technologies. – 2015. – Vol. 40. – P. 161–168.

7. Balonin N.A., Sergeev M.B. Construction of Transformation Basis for Video and Image Masking Procedures // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – 2014. – Vol. 262. – P. 462–467.

8. Sergeyev A.M. The generalized Mersenn's matrixes and Balonin's hypothesis // Automatic equipment and computer facilities. – 2014. – № 4. – P. 35–43.

9. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1893. – Vol. 17. – P. 240–246.

10. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices // Journal of Mathematics and Physics. – 1933. – Vol. 12. – P. 311–320.

11. Sylvester J.J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers // Philosophical Magazine. – 1867. – Vol. 34. – P. 461–475.
12. Williamson J. Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares // Duke Math. J. – 1944. – № 11. – P. 65–81.
13. Balonin N. And, Sergeyev M.B. Matrixes Propus 92 and 116 // Management information systems. – 2016. – № 2. – P. 101–103. – DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.101
14. Balonin Yu.N., Klyukovkin V.R., Sergeyev A.M. A numerical algorithm of effective search of bicyclic matrixes on the basis of the table of cross references / the Scientific session of GUAP : cool. report in 3 parts. – SPb. : GUAP. SPb., 2017. – Part II: Technical science. – P. 179–184.
15. Balonin N.A., Sergeyev M.B., Suzdal V.S. Dynamic generators of quasiorthogonal matrixes of family of Hadamard // Works SPIIRAN. – 2017. – Issue 5 (54). – P. 224–243.
16. Balonin Yu.N., Sergeyev M.B. Algoritm and program of search and research of M-matrixes // Scientific and technical messenger of information technologies, mechanics and optics. – 2013. – № 3. – P. 82–86.
17. Balonin Yu.N. The program MMatrix-2 complex and M-matrixes found it // the Messenger of computer and information technologies. – 2013. – № 10 (112). – P. 58–64.
18. Seberry J. and Yamada M. Hadamard matrices, Sequences, and Block Designs, An Existence Theorem for Hadamard Designs, Lemma 4.8, Cases 1, 2. – P. 461.
19. Balonin N.A., Sergeyev M.B. Expansion of a hypothesis Rayzera on two-cyclic structures and resolvability of matrixes of Hadamard an ornament in the form of the bicycle with a double border // Infor-matsionno-upravlyayushchiye of a system. – 2017. – № 1 (86). – C. 2–10. – DOI: 10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
20. Hadamard's matrixes. Hadamard's matrix 428. / MATH NOTEBOOK. – URL : http://www.mathscinet.ru (date of the address: 02.12.18).
21. Jenny Seberry suggests we create a gallery of maths pictures / MATH NOTEBOOK. – URL : http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf (дата обращения : 02.12.18).
22. Mathematical foundations of scientific visualization, computer graphics, and massive data exploration / Edit. Möller T., Hamann B., Russell R. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – P. 350. – DOI: 10.1007/978-3-540-49926-8
23. Wu H.-M., Tzeng S., Chen C. Matrix Visualization. In: Handbook of Data Visualization. Springer Handbooks Comp. Statistics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. – P. 681–708. – DOI: 10.1007/978-3-540-33037-0_26
24. Interactive visualization of connections between cells in a matrix / Stack Overflow-Where Developers Learn, Share, & Build Careers. – URL : https://stackoverflow.com/questions/10418236/interactive-visualization-of-connections-between-cells-in-a-matrix (дата обращения : 02.12.18).
25. Introduction to Matrix Visualization / Naseem's IdeaLog – My blog on technology and the world at large as well as code in detail. – URL : https://mdnaseemashraf.wordpress.com/2015/07/06/introduction-to-matrix-visualization/ (дата обращения : 02.12.18)
26. Judy-Anne Osborn. Visualizing Maximal Determinant Matrices / EViMS: Workshop on the Effective Use of Visualization in the Mathematical Sciences 23–25 November, 2012. – URL : https://carma.newcastle.edu.au/meetings/evims/ (дата обращения : 02.12.18).
27. Sergeyev A.M. About interrelation of one type of the quasiorthogonal matrixes constructed on orders of the sequences 4k and 4k-1 // News SPbGETU of «LETI». – 2017. – № 7. – P. 12–17.
28. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Two-Circulant Golden Ratio Matrices // Ying-formational managing directors of a system. – 2014. – № 5. – P. 5–11.
29. Balonin N.A., Sergeyev M.B., Mironovsky L.A. Calculation of matrixes of Hadamard-Fermat // Management information systems. – 2012. – № 6. – P. 90–93.
30. Toporkov M.A. Studying of an ornamental matrix of $N = H^T H$ in problems of a maximum of a determinant // the Seventieth GUAP international student's scientific conference : cool. report in 4 parts. – SPb. : GUAP. SPb., 2017. – P. 207–211.