

УДК 532

## СЕДИМЕНТАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ



## SEDIMENTATION ANALYSIS OF PARTICLE MOTION IN A VISCOUS LIQUID UNDER THE ACTION OF EXTERNAL FORCES PARTICLES IN A VISCOUS LIQUID UNDER THE ACTION OF EXTERNAL FORCES

### Пережогин Л.А.

кандидат технических наук,  
доцент,  
Краснодарское высшее  
военное авиационное училище летчиков  
kvvaul@mil.ru

### Терехов В.В.

кандидат технических наук,  
доцент,  
Краснодарское высшее  
военное авиационное училище летчиков  
kvvaul@mil.ru

### Савицкий Ю.А.

доцент,  
Краснодарское высшее  
военное авиационное училище летчиков  
kvvaul@mil.ru

### Терехов В.В.

студент,  
Кубанский государственный  
технологический университет  
mitya.ivanov.2015@gmail.ru

**Аннотация.** В статье авторами проведен анализ применения теории седиментации и движение частиц в вязкой жидкости под действием внешних сил, который позволяет проводить расчеты скорости движения частиц их распределения и осаждения в эмульсиях, с частицами разной величины и плотности в разработанных устройствах очистки жидкости. Авторы в своей статье приводят расчеты и формулы, подтверждающие свои теоретические гипотезы.

**Ключевые слова:** движение частиц, плотность частиц, скорость частиц, внешние силы, движение жидкости, уравнение Навье-Стокса, скорость седиментации, эмульсии.

### Perezhogin L.A.

PhD in Technical Sciences,  
Associate Professor,  
Krasnodar Higher Military Flight School  
kvvaul@mil.ru

### Terekhov V.V.

PhD in Technical Sciences,  
Associate Professor,  
Krasnodar Higher Military Flight School  
kvvaul@mil.ru

### Savitsky Yu.A.

Associate Professor,  
Krasnodar Higher Military Flight School  
kvvaul@mil.ru

### Terekhov V.V.

Student,  
Kuban State Technological University  
mitya.ivanov.2015@gmail.ru

**Annotation.** In the article, the authors analyzed the application of the theory of sedimentation and the movement of particles in a viscous liquid under the action of external forces, which allows calculations of the velocity of particles of their distribution and deposition in emulsions, with particles of different sizes and densities in the developed liquid purification devices. The authors in their article provide calculations and formulas confirming their theoretical hypotheses.

**Keywords:** particle motion, particle density, particle velocity, external forces, fluid motion, Navier- Stokes equation, sedimentation rate, emulsions.

Для расчетов, определения скорости движения частиц их распределения и осаждения в эмульсиях, с частицами разной величины и плотности разработанных устройств очистки жидкости, будем использовать метод седиментационного анализа. Седиментационный анализ – один из наиболее широко применяемых непрямых методов определения размера частиц и их распределения в потоке жидкости. Он основан на зависимости скорости осаждения однородных частиц от их размеров.

Задачу о движении частицы в вязкой жидкости под действием внешней силы в 1851 году решил британский математик Джордж Стокс. Им было получено решение уравнения Навье-Стокса для движения сферической частицы очень малого размера в жидкости при очень малых значениях ее скорости, и оно имеет вид:

$$F = -6 \cdot \pi \cdot r_q \cdot \mu \cdot v, \quad (1)$$

где  $F$  – сила трения, также называемая силой Стокса, Н;  $r_c$  – радиус частицы, м;  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости, Нс/м<sup>2</sup>;  $v$  – скорость частицы, м/с.

Знак « $\rightarrow$ » в выражении (1) указывает на то, что направление силы сопротивления среды противоположно направлению действия внешней силы (и направлению движения частицы со скоростью  $v$ ). Силу трения  $F$ , приложенную к частице называют также силой лобового сопротивления.

Введем, и в дальнейшем будем использовать, для частицы индекс «ч», а для жидкости – индекс «ж».

Силу сопротивления частице при ее движении в жидкости обозначим  $F_{\text{сопр}}$ , радиус частицы  $r_c$  выразим через ее диаметр  $d_c = 2 \cdot r_c$  и перепишем закон Стокса (1), в виде:

$$F_{\text{сопр}} = -3 \cdot \pi \cdot d_c \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot v_c, (2)$$

Анализируя процесс оседания частицы в жидкости под действием силы, когда плотность частицы больше, чем плотность жидкости, можно выделить три этапа. В начальный момент частица, в соответствии с законом Ньютона, начинает ускоренное движение. По мере увеличения скорости сила сопротивления движению (сила трения) увеличивается, и ускорение, с которым движется частица, постепенно уменьшается. На третьем этапе сила тяжести полностью уравнивается противодействующими ей силами трения и Архимедовой силой, после чего скорость осаднения частицы приобретает наибольшее значение и далее остается постоянной. Этот режим движения с постоянной скоростью называют установившимся, скорость движения (осаднения) называют *скоростью седиментации*, и обозначают  $v_{\text{сед}}$ , ( $v_{\text{сед}} = v_c$ ).

Установившееся движение частицы в жидкости наступает тогда, когда сумма всех действующих на частицу сил будет равна нулю:

$$F_c + F_{\text{сопр}} + F_{\text{Ар}} = 0. (3)$$

Схема сил, действующих на частицу с плотностью  $\rho_c$ , находящуюся в жидкости с плотностью  $\rho_{\text{ж}}$ , ( $\rho_c > \rho_{\text{ж}}$ ) представлена на рисунок 1.

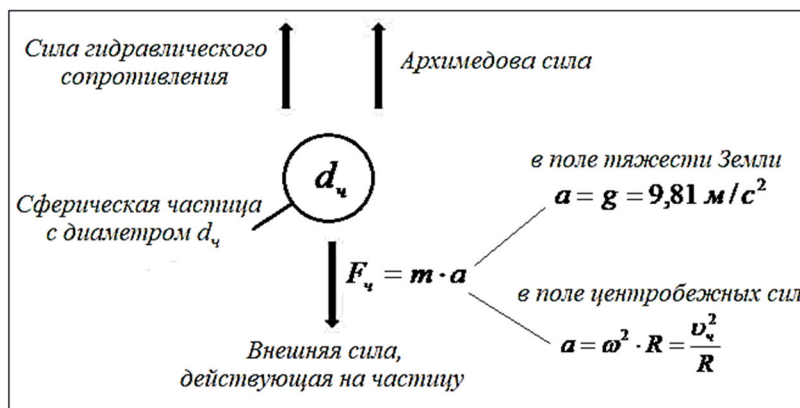


Рисунок 1 – Схема сил, действующих на частицу, помещенную в жидкость

Когда на частицу воздействует только сила тяжести, внешнюю силу можно выразить формулой:

$$F_c = m_c \cdot g = g \cdot \frac{\pi \cdot d_c^3}{6} \cdot \rho_c. (4)$$

Здесь:  $m_c = \frac{\pi \cdot r_c^3}{6} \cdot \rho_c$  – масса частицы, выраженная через ее диаметр и плотность.

Противодействуют этой силе две силы:

это Архимедова сила:

$$F_{Ap} = -V_{\text{ч}} \cdot \rho_{\text{жс}} \cdot g = \frac{\pi \cdot d_{\text{ч}}^3}{6} \cdot \rho_{\text{жс}} \cdot g, \quad (5)$$

и сила сопротивления  $F_{\text{сопр}}$ , оказываемая частице при ее движении в жидкости, описываемая формулой Стокса (2).

После подстановки в уравнение равновесия (3) выражений (2), (4), (5), получим выражение:

$$\left( \frac{\pi \cdot d_{\text{ч}}^3}{6} \cdot \rho_{\text{ч}} \right) \cdot a + (-3 \cdot \pi \cdot d_{\text{ч}} \cdot \mu_{\text{жс}} \cdot v_{\text{ч}}) + \left( -\frac{\pi \cdot d_{\text{ч}}^3}{6} \cdot \rho_{\text{жс}} \cdot g \right) = 0. \quad (6)$$

Из (6) можно найти формулу для определения скорости оседания частицы в поле силы тяжести:

$$v_{\text{ч}} = v_{\text{сед}} = \frac{d_{\text{ч}}^2 \cdot g}{18 \cdot \mu_{\text{жс}}} \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}}), \text{ м/с}. \quad (7)$$

Преобразовав формулу (7), получим зависимость для определения радиуса частицы, соответствующей заданной скорости седиментации:

$$d_{\text{ч}} = \sqrt{\frac{18 \cdot \mu_{\text{жс}} \cdot v_{\text{ч}}}{g \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}}, \text{ м}. \quad (8)$$

При постоянном значении скорости осаждения путь  $H$ , пройденный частицей (называемый также высотой осаждения), можно выразить, как  $H = v_{\text{ч}} \cdot t$ . Выполнив эту подстановку в уравнение (8), получим выражение для расчета времени осаждения при заданных значениях  $d_{\text{ч}}$ ,  $v_{\text{ч}}$  и  $H$ :

$$t = \frac{18 \cdot H \cdot \mu_{\text{жс}}}{d_{\text{ч}}^2 \cdot g \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}, \text{ с}. \quad (9)$$

Уравнение (6) записано для частицы, свободно осаждающейся в невозмущенной жидкости под воздействием поля тяжести Земли.

Зависимости (7–9) могут быть использованы для условий, когда действует закон Стокса, т.е. когда частица имеет сферическую форму, а ее размеры и скорость очень малы. Потому для практического использования этих формул важно представлять количественные оценки связи размеров частиц со временем их осаждения и длиной пути осаждения.

Например, частица с плотностью  $\rho_{\text{ч}} = 3000 \text{ кг/м}^3$  и диаметром 20 мкм под действием силы тяжести пройдет в воде с плотностью  $\rho_{\text{жс}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  расстояние, равное 0,01 м (или 1 см) за  $22,94 \approx 23$  секунды. А если диаметр частицы равен 20 нм, то такое же расстояние она пройдет за 22935780 с, т.е. почти за девять месяцев.

Скорость седиментации можно увеличить, а время осаждения уменьшить, увеличив активную силу, действующую на частицу. Этого можно добиться, поместив частицу во вращающийся цилиндр, заполненный жидкостью. В цилиндре, вращающемся с угловой скоростью  $\omega$ , на частицу, расположенную на расстоянии  $R$  от оси вращения цилиндра, будет действовать центробежное (нормальное) ускорение:

$$a_n = \omega^2 \cdot R, \text{ м/с}^2. \quad (10)$$

Соответственно сила, приложенная к частице, будет равна:

$$F_{\text{ч}} = m_{\text{ч}} \cdot a_n = m_{\text{ч}} \cdot \omega^2 \cdot R = \pi \cdot \frac{d_{\text{ч}}^3}{6} \cdot \rho_{\text{ч}} \cdot \omega^2 \cdot R, \text{ Н} \quad (11)$$

С учетом (11) формула для расчета скорости осаждения  $v_{\text{ч}}$  примет вид:

$$v_{\text{ч}} = \frac{d_{\text{ч}}^2 \cdot \omega^2 \cdot R}{18 \cdot \mu_{\text{жс}}} \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}}), \text{ м/с}, \quad (12)$$

В ряде случаев бывает удобно использовать значение величины отношения центробежного ускорения  $a_n$  к ускорению свободного падения  $g$ :

$$K = \frac{a}{g}, \quad (13)$$

и тогда формулу (12) можно записать в виде:

$$v_{\text{ч}} = \frac{d_{\text{ч}}^2 \cdot K \cdot g}{18 \cdot \mu_{\text{жс}}} \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}}), \text{ м/с}, \quad (14)$$

а формулы (8) и (10) будут записаны так:

$$d_{\text{ч}} = \sqrt{\frac{18 \cdot \mu_{\text{жс}} \cdot v_{\text{ч}}}{K \cdot g \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}}, \text{ м}. \quad (15)$$

$$t = \frac{18 \cdot H \cdot \mu_{\text{жс}}}{d_{\text{ч}}^2 \cdot g \cdot K \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}, \text{ с}. \quad (16)$$

В современных центрифугах скорости вращения  $n$  имеют порядок 103–104 об/мин, что, теоретически, позволяет на такие же порядки увеличивать скорость осаждения частиц, уменьшить время осаждения и, при прочих равных условиях, осаждают частицы в  $\sqrt{n}$  раз меньшего диаметра.

Практически важным является случай, когда частица находится в потоке жидкости, движущейся по криволинейному каналу (змеевику) и скорость частицы равна средней скорости потока в змеевике  $v_{\text{зм}}$ . При этом на расстоянии, равном мгновенному радиусу кривизны канала  $R_{\text{зм}}$ , на котором находится частица, к ней будет приложено нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v_{\text{зм}}^2}{R_{\text{зм}}}, \quad (17)$$

где  $v_{\text{зм}}$  – линейная скорость частицы на круговой траектории с радиусом  $R_{\text{зм}}$ .

Под действием силы, пропорциональной значению  $a_n$ , начнется перемещение частицы в радиальном направлении, и, если радиальную скорость обозначить  $u_{\text{ч}}$ , то, по аналогии с формулами (14–16), для определения значений  $u_{\text{ч}}$ ,  $d_{\text{ч}}$ , и времени осаждения  $t$  получим формулы:

$$v_{\text{ч}} = \frac{d_{\text{ч}}^2 \cdot v_{\text{зм}}^2}{18 \cdot \mu_{\text{жс}} \cdot R_{\text{зм}}} \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}}), \text{ м/с}, \quad (18)$$

$$d_{\text{ч}} = \sqrt{\frac{18 \cdot \mu_{\text{жс}} \cdot v_{\text{ч}} \cdot R_{\text{зм}}}{v_{\text{зм}}^2 \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}}, \text{ м}. \quad (19)$$

$$t = \frac{18 \cdot \mu \cdot R_{\text{зм}} \cdot H}{d_{\text{ч}}^2 \cdot v_{\text{зм}}^2 \cdot (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{жс}})}, \text{ с} \quad (20)$$

В этих формулах коэффициент:

$$K = \frac{a_n}{g}.$$

Формулы (12), (14), (15) и (18–20) были выведены с использованием формулы Стокса, т.е. режим осаждения частиц предполагался ламинарным. Вместе с тем практика показывает, что ламинарный режим, которому соответствует формула Стокса, для столь малых частиц нарушается наличием малейшей вибрации, перепадами тем-

ператур, и, наконец, тепловым движением молекул в дисперсионной среде, какой являются жидкости и газы. Это тепловое движение частиц называют Броуновским.

Броуновское движение частиц, находящихся в дисперсионной среде, обусловлено их столкновениями с молекулами среды, и его обязательно следует учитывать для частиц с размером 100 нм и менее. Для частиц большего размера число ударов молекул по частицам становится очень большим и, по законам статистики, суммарный импульс частицы оказывается близким к нулю.

Средний сдвиг частицы при ее тепловом (Броуновском) движении определяют по уравнению Эйнштейна:

$$[\ ] = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T \cdot t}{N_A \cdot B}} \quad (21)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура;  $N_A$  – число Авогадро;  $B$  – коэффициент, учитывающий трение частицы;  $t$  – время сдвига частицы на расстояние  $[\ ]$ .

В работах [1, 2] показано, что с учетом закона Стокса формулу (21) можно представить в виде:

$$[\ ] = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot t}{3 \cdot \pi \cdot \mu_{жс} \cdot r_q \cdot N_A}} \quad (22)$$

Для оценки скорости теплового движения частиц достаточно рассчитать по формуле (21) средний сдвиг частицы за 1 секунду (подставив значение  $t = 1$ ). И хотя выражения (21), (22), имеют размерность [м], после такой подстановки полученный результат даст расчетное значение скорости  $v_q$ , размерность которой [м/с].

Оценим, при каком диаметре частицы, ее пробег, вызванный тепловым движением, будет равен пути осаждения, вычисленному по формуле (22).

Заменим в (22) радиус на диаметр:

$$[\ ] = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot T \cdot t}{3 \cdot \pi \cdot \mu_{жс} \cdot d_q \cdot N_A}} \quad (23)$$

а из формулы (22) найдем выражение для пути осаждения  $H$ :

$$H = \frac{t \cdot d_q^2 \cdot g \cdot (\rho_q - \rho_{жс})}{18 \cdot \mu_{жс}} \quad (24)$$

Затем приравняем уравнения (23) и (24), разрешим полученное равенство относительно  $d_q$ , и  $t$  получим формулы для расчета этих параметров для случая, когда  $[\ ] = H$ .

$$d_q = \left( \frac{216 \cdot R \cdot T \cdot 18^2 \cdot \mu_{жс}}{\pi \cdot N_A \cdot t \cdot [g \cdot (\rho_q - \rho_{жс})]^2} \right)^{0,2} \quad (25)$$

$$t = \frac{216 \cdot R \cdot T \cdot 18^2 \cdot \mu_{жс}}{\pi \cdot N_A \cdot d_q^5 \cdot [g \cdot (\rho_q - \rho_{жс})]^2} \quad (26)$$

Таким образом, использование теории седиментации и движение частиц в вязкой жидкости под действием внешних сил позволяет проводить расчеты скорости движения частиц, их распределение и осаждение в эмульсиях, с частицами разной величины и плотности разработанных устройств очистки жидкости.

## Литература

1. Фролов Ю.Г. Курс коллоидной химии. Поверхностные явления и дисперсные системы. – М. : Химия, 1989. – 464 с.
2. Эмирджанов Р.Т. Основы технологических расчетов в нефтепереработке. – Л. : Химия, 1965. – 544 с.
3. Сепаратор очистки жидкости центробежный с кольцевыми каналами / В.В. Терехов, Ю.А. Савицкий, П.В. Чумак, В.А. Косой // Патент на полезную модель 204736 U1, 08.06.2021. Заявка № 2021102923 от 08.02.2021.
4. Чумак П.В. Устройство очистки жидкости / П.В. Чумак, В.В. Терехов // Патент на полезную модель RU 161442 U1, 20.04.2016. Заявка № 2015147679/05 от 05.11.2015.
5. Терехов В.В. Сепаратор очистки жидкости центробежный / В.В. Терехов, Л.А. Пережогин // Патент на изобретение RU 2484877 C1, 20.06.2013. Заявка № 2012109098/05 от 11.03.2012.
6. Терехов В.В. Устройство очистки жидкости / В.В. Терехов, М.И. Рябухин // Патент на полезную модель RU 116781 U1, 10.06.2012. Заявка № 2012101719/05 от 18.01.2012.
7. Докучаев В.Г. Устройство для очистки жидкости / В.Г. Докучаев, М.И. Рябухин, В.В. Терехов // Патент на изобретение RU 2404839 C1, 27.11.2010. Заявка № 2009121486/05 от 08.06.2009.
8. Докучаев В.Г. Методика численного моделирования турбулентного течения в осесимметричном канале. The Methodic of computational modeling of turbulent stream in axisymmetric channel / В.Г. Докучаев, В.В. Терехов // Техника и технология. – 2010. – № 4. – С. 29–33.
9. Терехов В.В. Инновационный метод очистки воды от техногенных загрязнений / В.В. Терехов, И.А. Чумак, В.В. Терехов // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2022. – № 1. – С. 186–190.
10. Инерционный насос-сепаратор / В.В. Терехов, Д.В. Терехов, Я.Д. Терехов, В.В. Терехов // Патент на изобретение RU 2785564, 08.12.2022. Заявка № 2022101522 от 24.01.2022.
11. Устройство для очистки воды в местах экологических катастроф / В.В. Терехов, Л.А. Пережогин, П.В. Чумак, Ю.А. Савицкий, В.В. Терехов // Патент на изобретение RU 277152, 01.08.2022. Заявка № 2021127498 от 20.00.2021.

## References

1. Frolov Yu.G. Course of colloid chemistry. Surface phenomena and dispersed systems. – M. : Chemistry, 1989. – 464 p.
2. Emirdzhanov R.T. Fundamentals of technological calculations in oil refining. – L. : Chemistry, 1965. – 544 p.
3. Centrifugal liquid purification separator with annular channels / V.V. Terekhov, Yu.A. Savitsky, P.V. Chumak, V.A. Oblique // Utility model patent 204736 U1, 06/08/2021. Application № 2021102923 dated 02/08/2021.
4. Chumak P.V. Liquid purification device / P.V. Chumak, V.V. Terekhov // Utility model patent RU 161442 U1, 04/20/2016. Application № 2015147679/05 dated 11/05/2015.
5. Terekhov V.V. Centrifugal liquid purification separator / V.V. Terekhov, L.A. Perezhogin // Patent for invention RU 2484877 C1, 06/20/2013. Application № 2012109098/05 dated 03/11/2012.
6. Terekhov V.V. Liquid purification device / V.V. Terekhov, M.I. Ryabukhin // Utility model patent RU 116781 U1, 06/10/2012. Application № 2012101719/05 dated 01/18/2012.
7. Dokuchaev V.G. Liquid purification device / V.G. Dokuchaev, M.I. Ryabukhin, V.V. Terekhov // Patent for invention RU 2404839 C1, 11/27/2010. Application № 2009121486/05 dated 06/08/2009.
8. Dokuchaev V.G. Technique for Numerical Simulation of Turbulent Flow in an Axisymmetric Channel. The Methodic of computational modeling of turbulent stream in axisymmetric channel / V.G. Dokuchaev, V.V. Terekhov // Technique and technology. – 2010. – № 4. – P. 29–33.
9. Terekhov V.V. Innovative method of water purification from technogenic pollution / V.V. Terekhov, I.A. Chumak, V.V. Terekhov // Science. Technique. Technologies (polytechnic bulletin). – 2022. – № 1. – P. 186–190.
10. Inertial separator pump / V.V. Terekhov, D.V. Terekhov, Ya.D. Terekhov, V.V. Terekhov // Patent for invention RU 2785564, 08.12.2022. Application № 2022101522 dated 01/24/2022.
11. Device for water purification in places of ecological disasters / V.V. Terekhov, L.A. Perezhogin, P.V. Chumak, Yu.A. Savitsky, V.V. Terekhov // Patent for invention RU 277152, 08/01/2022. Application № 2021127498 dated 20.00.2021.