

УДК 621.452.3

**РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЁННОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ГУСТУЮ РЕШЁТКУ
ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ**



**IMPLEMENTATION OF AN APPROXIMATE MODEL OF THE IDEAL FLOW
INCOMPRESSIBLE FLUID THROUGH A THICK LATTICE OF THIN PROFILES**

Нефедовский В.А.

доцент,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков
victor_anna@mail.ru

Савицкий Ю.А.

доцент,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков
kvvaul@mil.ru

Терехов В.В.

кандидат технических наук, доцент,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков
kvvaul@mil.ru

Аннотация. В статье рассматривается обтекание решетки тонких профилей безвихревым потоком несжимаемой жидкости. Задача рассматривается для малого шага решетки или большой ее густоте, когда характеристики течения жидкости в решетке, особенно распределение давления, будут значительно отличаться от течения в решетке с большим шагом. Показано, что полученная модель может быть обобщена на более сложные задачи теории решеток – нестационарные задачи и задачи обтекания решетки потоком сжимаемой жидкости.

Ключевые слова: решетка тонких профилей, безотрывное обтекание, краевая задача, интенсивность вихрей, распределение давления, интеграл фурье, нестационарное обтекание несжимаемой жидкостью, передаточная функция.

Nefedovsky V.A.

Associate Professor,
Krasnodar Higher Military Flight School
victor_anna@mail.ru

Savitsky Yu.A.

Associate Professor,
Krasnodar Higher Military Flight School
kvvaul@mil.ru

Terekhov V.V.

PhD in Technical Sciences,
Associate Professor,
Krasnodar Higher Military Flight School
kvvaul@mil.ru

Annotation. The article considers the flow around a lattice of thin profiles by an irrotational flow of an incompressible fluid. The problem is considered for a small lattice spacing or its high density, when the characteristics of the fluid flow in the lattice, especially the pressure distribution, will differ significantly from the flow in a lattice with a large lattice pitch. It is shown that the resulting model can be generalized to more complex problems of lattice theory – non-stationary problems and problems of a compressible fluid flow around a lattice.

Keywords: lattice of thin profiles, non-separated flow, boundary problem, vortex intensity, pressure distribution, fourier integral, non-stationary flow around an incompressible fluid, transfer function.

Рассмотрим безвихревое обтекание решетки тонких профилей с продольным шагом h , углом выноса β , хордой $b = 1$ и густотой $q = b/h$ установившимся потоком несжимаемой жидкости (рис. 1) [1].

Краевая задача для потенциала возмущённых скоростей течения жидкости, подчиняющегося уравнению Лапласа [2]

$$\Delta\varphi = 0 \text{ вне } S_n, \quad (1)$$

краевые условия непротекания профилей

$$\varphi_y = V_\infty f'(x), (x, y) \in S_n \quad (2)$$

и условия на бесконечности:

$$|\nabla\varphi| \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty,$$

$$|\nabla\varphi| < \infty \text{ при } x \rightarrow +\infty \quad (3)$$

может быть сведена к интегральному уравнению для безразмерного перепада давления

$$\gamma = \frac{p_- - p_+}{\rho V_\infty^2}, \quad (4)$$

$$\int_0^1 \gamma(s)K(x-s)ds = -f'(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

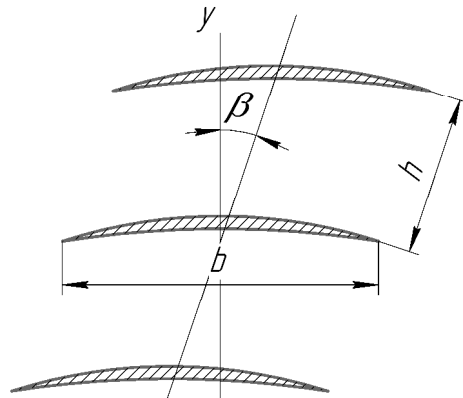


Рисунок 1

Здесь

$$K(x) = \frac{1}{4h} \left[\frac{\text{Cos}\beta \text{Sh}\left(\frac{2\pi}{h} x \text{Cos}\beta\right) - \text{Sin}\beta \text{Sin}\left(\frac{2\pi}{h} x \text{Sin}\beta\right)}{\text{Sh}^2\left(\frac{\pi}{h} x \text{Cos}\beta\right) + \text{Sin}^2\left(\frac{\pi}{h} x \text{Sin}\beta\right)} + \text{Cos}\beta \right]. \quad (6)$$

Функция $\gamma(x)$ физически интерпретируется как интенсивность вихрей, распределённых по проекциям S_n тонких профилей на прямые $y = n \text{Cos}\beta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

При малом шаге решётки b или большой густоте q характеристики течения жидкости, в частности, распределения давления, значительно отличаются от типовых для редкой решётки [3].

Известно, что при уменьшении шага h аэродинамическая нагрузка (перепад давления на профиле) концентрируется около передней кромки, что соответствует предельному вырождению интегрального уравнения при $h \rightarrow 0$ [4]

$$\frac{\text{Cos}\beta}{2h} \int_0^x \gamma(\xi) d\xi - f'(x) = g(x). \quad (7)$$

Вариантом решения уравнения (7) является

$$\gamma(x) = \frac{2h}{\text{Cos}\beta} \delta(x) g(x). \quad (8)$$

Однако такое решение, правильно отражая тенденцию в распределении давления для густых решёток, всё же является слишком упрощённым и содержит обобщённую функцию $\delta(x)$ [5].

Для получения решения, пригодного в более широком диапазоне h , рассмотрим следующее выражение для ядра $K(x)$ в виде [6] интеграла Фурье

$$K(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{\text{Sh}(2h\alpha \text{Cos}\beta) e^{-i\alpha x} d\alpha}{\text{Ch}(2h\alpha \text{Cos}\beta) - \text{Cos}(2h\alpha \text{Sin}\beta)}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

При $h \rightarrow \infty$ справедливо следующее разложение

$$\frac{Sh(2h\alpha \text{Cos}\beta)}{Ch(2h\alpha \text{Cos}\beta) - \text{Cos}(2h\alpha \text{Sin}\beta)} \approx \frac{\text{Cos}\beta}{h\alpha} \left(1 + \frac{h^2\alpha^2}{3} + \dots \right). \quad (10)$$

На основе свойств преобразования Фурье приходим к выводу, что интегралы уравнения (4) при $h \rightarrow 0$ вырождаются в дифференциальные

$$\frac{d^2\Gamma}{dx^2} - \frac{3}{h^2}\Gamma = \frac{3}{h} \frac{V_y(x)}{\text{Cos}\beta}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{для } \Gamma = \int_0^x \gamma(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Краевыми условиями для данного уравнения будут

$$\Gamma(0) = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dx}(1) = 0. \quad (12)$$

Последнее условие есть условие Жуковского-Чаплыгина [7].

Решение краевой задачи (11), (12) имеет вид

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{3}}{\text{Cos}\beta} \left[\int_0^x V_y(s) Sh \frac{\sqrt{3}}{h} (x-s) ds - \frac{Sh \frac{\sqrt{3}}{h} x}{Ch \frac{\sqrt{3}}{h}} \int_0^1 V_y(s) Ch \frac{\sqrt{3}}{h} (1-s) ds \right]. \quad (13)$$

Отсюда легко вычислить функцию распределения безразмерного давления

$$\gamma(x) = \frac{d\Gamma}{dx} = \frac{3}{h \text{Cos}\beta} \left[\int_0^1 V_y(s) Ch \frac{\sqrt{3}}{h} (x-s) ds - \frac{Ch \frac{\sqrt{3}}{h} x}{Ch \frac{\sqrt{3}}{h}} \int_0^1 V_y(s) Ch \frac{\sqrt{3}}{h} (1-s) ds \right] \quad (14)$$

и суммарный коэффициент подъёмной [8] силы

$$c_y = 2 \int_0^1 \gamma(x) dx = 2\Gamma(1) = \frac{2\sqrt{3}}{\text{Cos}\beta} \int_0^1 V_y(s) \frac{Sh \frac{\sqrt{3}}{h} s}{Ch \frac{\sqrt{3}}{h}} ds. \quad (15)$$

Для решётки тонких профилей под малым углом атаки α

$$V_y(x) = -\alpha, \quad (16)$$

тогда

$$\frac{\gamma(x)}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\text{Cos}\beta} \frac{Sh \frac{\sqrt{3}}{h} (1-x)}{Sh \frac{\sqrt{3}}{h}}, \quad (17)$$

$$\frac{c_y}{\alpha} = \frac{2h}{\text{Cos}\beta} \left(1 - \frac{1}{Ch \frac{\sqrt{3}}{h}} \right). \quad (18)$$

Учитывая, что при $h < 1$ $Th \frac{\sqrt{3}}{h} \approx 1$, приходим к выражению

$$\frac{\gamma(x)}{\alpha} \approx \frac{\sqrt{3}}{\text{Cos}\beta} e^{-\frac{\sqrt{3}}{h}x}, \quad (19)$$

что означает сильный отрицательный градиент в распределении давления вблизи передней кромки [9].

Формула (19) так же правильно отражает характер зависимости от шага решётки и угла выноса для густых решёток.

Таким образом, уравнение (11) в достаточно хорошо отражает качественную картину обтекания густых решёток.

Полученные модели могут быть обобщены на более сложные задачи теории решёток – на нестационарные задачи и на задачи обтекания решетки профилей потоком сжимаемого газа.

В случае нестационарного обтекания несжимаемой жидкостью вводим функцию Γ по формуле [4]

$$\bar{\Gamma} = e^{-ikx} \int_0^x e^{ik\xi} \gamma(\xi) d\xi, \quad (20)$$

где k – число Струхаля.

Для функции Γ при $h \rightarrow \infty$ из интегрального уравнения

$$\int_0^1 \gamma(\xi) \left\{ K(x-s) - ike^{-ik(x-s)} \int_{-\infty}^{x-s} e^{ik\xi} K(x-\xi) d\xi \right\} ds = V_y(x) \quad (21)$$

следует асимптотика

$$\frac{d^2 \bar{\Gamma}}{dx^2} - \frac{3}{h^2} \bar{\Gamma} = \frac{3}{h} \frac{V_y(x)}{\cos \beta}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

при краевых условиях

$$\bar{\Gamma}(0) = \frac{d\bar{\Gamma}}{dx} + ik\bar{\Gamma} \Big|_{x=1} = 0. \quad (23)$$

После решения уравнения (23) с точностью до обозначений совпадающей с (12), с нестационарными краевыми условиями (24), можно вычислить c_y

$$c_y = 2\bar{\Gamma}(1) + 2ik \int_0^1 \bar{\Gamma}(x) dx. \quad (24)$$

Для вертикальных колебаний

$$c_y = -ikh \quad (25)$$

получим

$$\frac{c_y}{ikh} = \frac{2h}{\cos \beta} \left\{ \frac{\left(Ch \frac{\sqrt{3}}{h} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{h} + ik Cth \frac{\sqrt{3}}{2h} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{h} Ch \frac{\sqrt{3}}{h} + ik Sh \frac{\sqrt{3}}{h}} + ik \left(1 - \frac{2h}{\sqrt{3}} Cth \frac{\sqrt{3}}{2h} \right) \right\}. \quad (26)$$

Согласно (26) функция Теодорсена для густых решёток

$$T(k, h) = \frac{1 + ik \frac{h}{\sqrt{3}} Cth \frac{\sqrt{3}}{2h}}{1 + ik \frac{h}{\sqrt{3}} Th \frac{\sqrt{3}}{h}} \quad (27)$$

передаточная функция ($ik \rightarrow p$)

$$c_y(p) = \frac{2h}{\cos \beta} \left[\left(1 - \frac{1}{Ch \frac{\sqrt{3}}{h}} \right) \frac{1 + p \frac{h}{\sqrt{3}} Cth \frac{\sqrt{3}}{2h}}{1 + p \frac{h}{\sqrt{3}} Th \frac{\sqrt{3}}{h}} + p \left(1 - \frac{2h}{\sqrt{3}} Cth \frac{\sqrt{3}}{2h} \right) \right]. \quad (28)$$

Отсюда переходные характеристики

$$c_y(t) = \frac{2h}{\cos\beta} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\cos\frac{\sqrt{3}}{h}} \right) \left(1 + \left(\frac{Cth\frac{\sqrt{3}}{2h}}{Th\frac{\sqrt{3}}{h}} - 1 \right) e^{-t\frac{h}{\sqrt{3}} Cth\frac{\sqrt{3}}{h}} + \left(1 - \frac{2h}{\sqrt{3}Cth\frac{\sqrt{3}}{2h}} \right) \delta(t) \right) \right\}.$$

Как видно из (28), постоянная времени $T = \frac{h}{\sqrt{3}} Th\frac{\sqrt{3}}{h} \rightarrow \frac{h}{\sqrt{3}}$. Поэтому длительность переходного процесса в густых решётках имеет порядок $O(h)$, что соответствует времени прохождения шага решётки со скоростью V_∞ [3].

Недостатком данной модели является незначительное (на величину $O(h^2)$) превышение постоянной времени числителя в (28) над постоянной времени для знаменателя. В целом предложенная модель правильно отражает аэродинамику густых решёток и может быть обобщена на случай сжимаемой среды. Полученные результаты качественно совпадают с решениями интегрального уравнения при малых h .

Литература

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. – М. : Наука, 1971.
2. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский [и др.]. – М. : Наука, 1988. – 231 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
4. Курзин В.Б., Юдин В.А. Аэродинамические характеристики решетки тонких профилей, обтекаемой идеальной несжимаемой жидкостью с отрывом потока с передних кромок // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2009. – № 2. – С. 6–17.
5. Системный подход к самостоятельной работе обучающихся / Ю.А. Савицкий [и др.]. // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1. – С. 445–448.
6. Савицкий Ю.А., Нефедовский В.А., Терехов В.В. Современный взгляд на естественно-научную грамотность обучаемых // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2020. – № 3. – С. 405–408.
7. Исаев Г.Р., Савицкий Ю.А., Терехов В.В. Требования безопасности полётов к самолётам транспортной категории // Сборник научных статей X Международной научно-практической конференции молодых ученых, посвященная 59-ой годовщине полета Ю.А. Гагарина в космос / КВВАУЛ им. А.К. Серова. – Краснодар : Издательский Дом – Юг, 2020. – С. 404–407.
8. Нефедовский В.А., Савицкий Ю.А., Терехов В.В. Исследования в области развития пространственного мышления будущего военного летчика // Гуманитарные и социальные науки. – Ротов-на-Дону, 2021. – № 2. – С. 226–237.
9. Варфоломеева С.В., Терехов В.В. Применение образовательных метаданных для овладения сравнительным методом и компаративным анализом в процессе изучения социально-гуманитарных дисциплин // Гуманитарные и социальные науки. – Ротов-на-Дону, 2020. – № 1. – С. 178–186.

References

1. Belotserkovsky S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. Wing in Unsteady Gas Flow. – М. : Nauka, 1971.
2. Mathematical modeling of plane-parallel tornado flowing of bodies / S.M. Belotserkovsky [etc.]. – М. : Nauka, 1988. – 231 p.
3. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, theory of elasticity and electrostatics. – М. : Nauka, 1985. – 253 s.
4. Kurzin V.B., Yudin V.A. Aerodynamic characteristics of thin profiles lattice, flowed by ideal incompressible fluid with flow detachment from the front edges // Izvestiya Rossii Akademii Nauk. Fluid and Gas Mechanics. – 2009. – № 2. – P. 6–17.
5. System approach to the independent work of students / Yu.A. Savitskiy [et al.] // Science. Technique. Technologies (Polytechnic Bulletin). – 2019. – № 1. – P. 445–448.

6. Savitsky Yu.A., Nefedovsky V.A., Terekhov V.V. Modern View on Natural-Scientific Literacy of Trainees // Nauka. Technique. Tekhnologii (Polytechnicheskiy Vestnik). – 2020. – № 3. – P. 405–408.
7. Isaev G.R., Savitsky Yu.A., Terekhov V.V. Flight safety requirements to transport category aircraft // Collection of scientific papers of X International Scientific-Practical Conference of Young Scientists, dedicated to the 59th anniversary of the flight of Yu.A. Gagarin into space / KVVUUL named after A.K. Serov. – Krasnodar : Publishing House – Yug, 2020. – P. 404–407.
8. Nefedovskiy V.A., Savitskiy Yu.A., Terekhov V.V. Research in the Development of Spatial Thinking of the Future Military Pilot // Humanities and Social Sciences. – Rotov-on-Don, 2021. – № 2. – P. 226–237.
9. Varfolomeeva S.V., Terekhov V.V. Application of educational metadata for mastering the comparative method and comparative analysis in the process of studying social-humanitarian disciplines // Humanities and Social Sciences. – Rotov-on-Don, 2020. – № 1. – P. 178–186.