

УДК 622.276.031:53(075)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗРАБОТКИ  
ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ ПЛАСТОВ  
С ЗОНАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН**



**DEFINITION OF DEVELOPMENT INDICATORS  
FRACTURED-POROUS FORMATIONS  
WITH ZONAL INHOMOGENEITY OF THE CRACK SYSTEM**

**Шарнов Александр Иванович**

канд. техн. наук, доцент,  
Армавирский механико-технологический институт (филиал),  
Кубанский государственный технологический университет  
a.i.sharnov@mail.ru

**Sharnov Alexander Ivanovich**

Cand. Tech. Sciences,  
Associate Professor,  
Armavir Institute of Mechanics  
and Technology (branch),  
Kuban State Technological University  
a.i.sharnov@mail.ru

**Аннотация.** В статье представлено решение задачи разработки ограниченного открытого пласта с зональной неоднородностью системы трещин центральной скважиной с постоянным забойным давлением.

**Annotation.** The article presents a solution to the problem of developing a limited open reservoir with zonal heterogeneity of the fracture system by a central well with a constant bottomhole pressure.

**Ключевые слова:** разработка, ограниченный пласт, зональная неоднородность, система трещин, скважина, постоянное давление.

**Keywords:** development, limited reservoir, zonal heterogeneity, fracture system, well, constant pressure.

Опубликован ряд работ, в которых решены задачи фильтрации с учетом зональной неоднородности нефтяных пластов с пористым типом коллектора, когда круговая залежь разрабатывается центральной скважиной с заданным давлением или расходом [1].

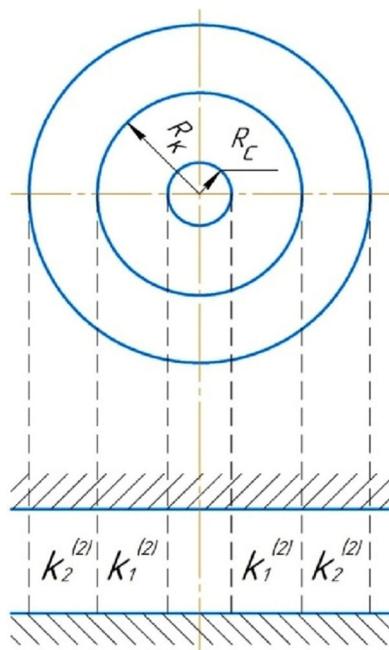
Для нефтяных месторождений с трещиновато-пористым типом коллектора также решены несколько гидродинамических задач [2–4], где получены решения задач по определению показателей разработки трещиновато-пористых пластов при центрально-симметричной фильтрации однородной жидкости для усеченной системы дифференциальных уравнений Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова, И.Н. Кочиной [3].

В настоящей работе рассматривается полная система дифференциальных уравнений с учетом поступательного потока жидкости из систем блоков в трещины при фильтрации однородной жидкости.

Пусть нефтяное месторождение с трещиновато-пористым типом коллектора разрабатывается совершенной по характеру и степени вскрытия скважиной радиуса  $R_c$  и на некотором расстоянии  $R_k$  от скважины имеет место определенное граничное условие, обусловленное процессом кольматации призабойной зоны скважины или выносом песка.

Предположим, что трещиновато-пористый пласт с непроницаемой кровлей и подошвой, первоначально находившийся в невозмущенном состоянии под давлением  $P_0$ , состоит из двух концентрично расположенных зон с различными значениями проницаемости систем трещин. Эксплуатационная скважина расположена в центре пластовой системы, изображенной на рисунке. Причем, призабойная зона скважины радиуса  $R_c \leq r \leq R_k$ , имеет проницаемость трещин  $k_1^{(2)}$ , а оставшаяся часть пласта, имеет проницаемость трещин  $k_2^{(2)}$ . Проницаемость систем блоков и свойства пластовой жидкости в указанных частях пласта принимаются одинаковыми, то есть  $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ .

Задача заключается в нахождении перераспределения давления в указанных частях пласта в произвольный момент времени его разработки скважиной с постоянным забойным давлением  $P_c$ .



**Рисунок** – Схематическое изображение пластовой системы с зональной неоднородностью системы трещин

В соответствии с теорией фильтрации однородной жидкости в средах с двойной пористостью [3, 4] математическая сторона задачи будет заключаться в интегрировании системы дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости во внутренней и внешних зонах пласта:

$$\begin{aligned} \frac{1+n_1}{n_1} \nabla^2 \varphi_2 + \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \omega + \frac{\omega}{n_1} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \varphi_1) - \omega \frac{1-\omega}{\lambda} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}; \\ \frac{1+n_2}{n_2} \nabla^2 \varphi_1 + \frac{1}{\lambda n_3} \left( 1 - \omega + \frac{\omega}{n_3} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \varphi_2) - \omega \frac{1-\omega}{\lambda n_3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} &= \frac{1}{n_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi, \tau) &= \frac{P_0 - P_i^{(2)}(\xi, \tau)}{P_0 - P_c}, \quad \xi = \frac{r}{R_c}, \quad \tau = \frac{k_1^{(2)} t}{\mu R_c^2 (\beta_{1,i}^* + \beta_{2,i}^*)}, \\ \beta_{j,i}^* &= m_{j,i} \beta_{j,i} + \beta_{j,i}, \quad n_1 = \frac{k_1^{(2)}}{k_1^{(1)}}, \quad n_2 = \frac{k_2^{(2)}}{k_2^{(1)}}, \quad n_3 = \frac{k_2^{(2)}}{k_1^{(1)}}, \\ \omega &= \beta_{2,i} (\beta_{1,i}^* + \beta_{2,i}^*), \quad \lambda = \alpha R_c^2 \frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Верхние индексы в функциях давления и параметрах пласта относятся к системе блоков ( $i = 1$ ) и трещин ( $i = 2$ ) среды, а нижние к принятым зонам среды.

Согласно постановке задачи систему уравнений (1) необходимо проинтегрировать при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi_i(\xi, 0) = 0, \quad 1 \leq \xi \leq \xi_1, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\varphi_1(1, \tau) = 1, \quad \tau > 0; \quad (3)$$

$$\varphi_1(\xi_0, \tau) = \varphi_2(\xi_0, \tau); \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_1(\xi_0, \tau) = n_3 \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_2(\xi_0, \tau); \quad (4)$$

$$\varphi_2(\xi_1, \tau) = 0, \quad (5)$$

где  $\xi_0 = \frac{R_0}{R_c}, \quad \xi_1 = \frac{R_k}{R_c}.$

Применяя интегральное преобразование Лапласа по переменному времени к уравнениям (1) с учетом начальных условий (2) можно получить

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi}_2(\xi, s) - sf_1(s) \bar{\varphi}_1(\xi, s) &= 0; \\ \nabla^2 \bar{\varphi}_1(\xi, s) - sf_2(s) \bar{\varphi}_2(\xi, s) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{\left(1 - \omega + \frac{\omega}{n_1}\right)s + \lambda \frac{1+n_3}{n_3}}; \\ f_2(s) &= \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda n_3}{\left(1 - \omega + \frac{\omega}{n_3}\right)s + \lambda n_3 \frac{1+n_3}{n_3}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Общие решения уравнений (6) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\xi, s) &= A_1 I_0(\xi \sqrt{sf_1(s)}) + B_1 K_0(\xi \sqrt{sf_1(s)}); \\ \bar{\varphi}_2(\xi, s) &= A_2 I_0\left(\xi \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) + B_2 K_0\left(\xi \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в общее решение (8) условия (3) – (5), предварительно подвергнутым преобразованиям Лапласа, для неизвестных постоянных  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) найдем следующие уравнения через функции Бесселя от мнимых аргументов первого  $I_{0(z)}$  и второго  $K_{0(z)}$  родов нулевого порядка:

$$\begin{aligned} A_1 I_0(\sqrt{sf_1(s)}) + B_1 K_0(\sqrt{sf_1(s)}) &= \frac{1}{s}; \\ A_2 I_0\left(\xi_1 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) + B_2 K_0\left(\xi_1 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) &= 0; \\ A_1 I_0(\xi_0 \sqrt{sf_1(s)}) + B_1 K_0(\xi_0 \sqrt{sf_1(s)}) - \\ - A_2 I_0\left(\xi_0 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) - B_2 K_0\left(\xi_0 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) &= 0; \\ A_1 I_1(\xi_0 \sqrt{sf_1(s)}) - B_1 K_1(\xi_0 \sqrt{sf_1(s)}) - \\ - \sqrt{n_3 \frac{f_2(s)}{f_1(s)}} \left[ A_2 I_1\left(\xi_0 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) - B_2 K_1\left(\xi_0 \sqrt{\frac{sf_2(s)}{n_3}}\right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решая уравнения (9) относительно постоянных  $A_i, B_i$ , получим выражения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{s\delta(\xi_0, \xi_1, s)} \left\{ K_1(\xi_0 \sqrt{s_1}) \left[ I_0(\xi_0 \sqrt{s_1}) K_0(\xi_0 \sqrt{s_2}) - I_0(\xi_0 \sqrt{s_2}) K_0(\xi_1 \sqrt{s_2}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{s_3 n_3} K_0(\xi_0 \sqrt{s_1}) \left[ I_1(\xi_0 \sqrt{s_2}) K_0(\xi_1 \sqrt{s_2}) + I_0(\xi_1 \sqrt{s_2}) K_1(\xi_0 \sqrt{s_2}) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{s\delta(\xi_0, \xi_1, s)} \left\{ I_1(\xi_1\sqrt{s_1}) \left[ I_0(\xi_1\sqrt{s_2}) K_0(\xi_0\sqrt{s_2} - I_0(\xi_0\sqrt{s_2}) K_0(\xi_1\sqrt{s_2})) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{s_3 n_3} I_0(\xi_0\sqrt{s_1}) \left[ I_1(\xi_0\sqrt{s_2}) I_0(\xi_0\sqrt{s_2}) K_0(\xi_1\sqrt{s_2}) + I_0(\xi_1\sqrt{s_2}) K_1(\xi_0\sqrt{s_2}) \right] \right\};$$

где

$$s_1 = sf_1(s), s_2 = \frac{sf_2(s)}{n_3}, s_3 = \frac{f_2(s)}{f_1(s)}, \\ \delta(\xi_0, \xi_1, s) = \left[ I_0(\xi_1\sqrt{s_2}) K_0(\xi_0\sqrt{s_2} - I_0(\xi_0\sqrt{s_2}) K_0(\xi_1\sqrt{s_2})) \right] \times \\ \times \left[ I_0(\sqrt{s_1}) K_1(\xi_0\sqrt{s_1} + I_1(\xi_0\sqrt{s_1}) K_0(\sqrt{s_1})) \right] - \\ - \sqrt{s_3 n_3} \left[ I_0(\xi_1\sqrt{s_2}) K_1(\xi_0\sqrt{s_2} + I_1(\xi_0\sqrt{s_2}) K_0(\xi_1\sqrt{s_2})) \right] \times \\ \times \left[ I_0(\sqrt{s_1}) K_0(\xi_0\sqrt{s_1} - I_0(\xi_0\sqrt{s_1}) K_0(\sqrt{s_1})) \right].$$

Подставляя найденные выражения коэффициентов  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ), в (8), решение задачи (1) – (5) можно представить в виде

$$\bar{\varphi}_1(\xi, s) = \frac{1}{s} \left[ M_{00}^-(\xi_1\sqrt{s_2}, \xi_0\sqrt{s_2}) \cdot M_{01}^+(\xi\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) - \right. \\ \left. - \sqrt{n_3 s_3} M_{10}^+(\xi_0\sqrt{s_2}, \xi_1\sqrt{s_2}) \cdot M_{00}^-(\xi\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) \right] \times \\ \times \left[ M_{00}^-(\xi_1\sqrt{s_2}, \xi_0\sqrt{s_2}) \cdot M_{01}^+(\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) - \right. \\ \left. - \sqrt{n_3 s_3} M_{10}^+(\xi_0\sqrt{s_2}, \xi_1\sqrt{s_2}) \cdot M_{00}^-(\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) \right]^{-1}; \quad (10) \\ \bar{\varphi}_2(\xi, s) = \frac{1}{s} M_{00}^-(\xi_1\sqrt{s_2}, \xi_1\sqrt{s_2}) \cdot M_{01}^+(\xi\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) \times \\ \times \left[ M_{00}^-(\xi_1\sqrt{s_2}, \xi_0\sqrt{s_2}) \cdot M_{01}^+(\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) - \right. \\ \left. - \sqrt{n_3 s_3} M_{10}^+(\xi_0\sqrt{s_2}, \xi_1\sqrt{s_2}) \cdot M_{00}^-(\sqrt{s_1}, \xi_0\sqrt{s_1}) \right]^{-1},$$

где  $M_{\alpha,\beta}^{\pm}(x, y) = I_{\alpha}(x)K_{\beta}(y) \pm I_{\beta}(y)K_{\alpha}(x)$ .

Пользуясь контуром Бромвича, можно найти оригиналы изображений (10). Однако полученное решение задачи оказывается громоздким и трудоемким для вычислений, поэтому здесь не приводится.

Для получения приближенного решения изучено, представленное в таблице, поведение выражений  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$ , определяемые соотношением (7), в интервале изменения  $0,001 \leq \text{Res} \leq 800$ .

Как следует из данных этой таблицы, в исследованном диапазоне изменения  $\text{Res}$ , отличие в значимых величинах  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  в среднем не превосходит 15%. При больших же значениях величины  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  становятся равными. Последнее следует также из аналитических выражений, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_i(x) = \frac{\omega(1-\omega)}{1-\omega + \frac{\omega}{n_i}}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Исходя из выше изложенного, примем

$$f_1(s) = f_2(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda n_3}{\left(1-\omega + \frac{\omega}{n_2}\right)s + \lambda n_3 \frac{1+n_2}{n_2}}. \quad (12)$$

Таблица – Значения  $f_1$  и  $f_2$ , вычисленные по формулам (7) при  $\omega = 0,001$ ,  $\lambda = 0,005$ ,  $n_3 = 2$

ReS	$10^4 f_1$				$10^4 f_2$			
	$n_1$				$n_2$			
	7319	8	30	40	3	4	6	8
0,001	6	7550	8111	8166	6978	7409	7896	8165
0,005	4622	4712	4925	4946	5458	5718	6004	6159
0,008	3622	3677	3806	3818	4692	4883	5090	5201
0,01	3166	3208	3306	3314	4221	4450	4621	4712
0,05	905	909	916	917	1588	1609	1631	1642
0,08	592	594	597	597	1081	1090	1100	1106
0,1	482	483	485	485	892	898	905	909
0,5	109	109	109	109	205	205	205	206
0,8	72	72	72	72	133	133	133	133
1	60	60	60	60	109	109	109	109
5	20	20	20	20	30	30	30	30
10	15	15	15	15	20	20	20	20
50	11	11	11	11	11	12	12	12
80	11	11	11	11	11	11	11	11
100	11	11	11	11	11	11	11	11

Заменяя в лапласовых изображениях функций понижения давлений (10) функции Бесселя от мнимых аргументов  $I_n(z)$  и  $K_n(z)$  их приближенными выражениями [5]

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64};$$

$$I_1(z) \approx \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^5}{384};$$

$$K_0(z) \approx -\ln \frac{\delta z}{2} + z^2 \left( 1 - \ln \frac{\delta z}{2} \right) + \frac{z^4}{64} \left( 3 - \ln \frac{\delta z}{2} \right);$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left( \ln \frac{\delta z}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{z^3}{16} \left( \ln \frac{\delta z}{2} - \frac{5}{4} \right),$$

где  $\delta = e^{\gamma}$ ,  $\gamma = 0,5772$ , для этих функций в общем виде можно получить выражение

$$\varphi_i^* \approx \frac{1}{s} \cdot \frac{a_{-1}^{(i)} S^{-1}(s) + a_0^{(i)} + a_1^{(i)} S(s) + \dots}{b_0^{(i)} + b_1^{(i)} S(s) + \dots}, \quad (13)$$

обладающие полюсом второго порядка.

Переход к оригиналу в (13) осуществим по известному правилу [6]:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi, \tau) &\approx \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{ds} s^2 \bar{\varphi}_i(\xi, s) \exp(s\tau) \right] = \\ &= \frac{a_{-1}^{(i)}}{b_0^{(i)}} \varepsilon_2 \tau + \left[ \frac{1 - \omega + \frac{\omega}{n_3}}{\lambda \varepsilon_2 n_3} - \omega(1 - \omega) \right] \frac{\omega(1 - \omega) \varepsilon_2 a_{-1}^{(i)}}{\lambda n_3 b_0^{(i)}} \times \\ &\times \left[ 1 - \exp\left( \frac{-\lambda n_3 \tau}{\omega(1 - \omega)} \right) \right] + \frac{a_0^{(i)} b_0^{(i)} - a_{-1}^{(i)} b_1^{(i)}}{(b_0^{(i)})^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом (14) в лапласовых изображениях (10) приближенное решение задачи о понижении давления в системах трещин составного по проницаемости трещиновато-пористого пласта с двойной пористостью для больших значений времени ( $\tau > 1$ ) получим в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(\xi, \tau) \approx & 2\varepsilon_2\tau + \left[ \frac{1-\omega + \frac{\omega}{n_2}}{\lambda\varepsilon_2 n_3} - \omega(1-\omega) \right] \frac{2\omega(1-\omega)\varepsilon_2}{\lambda n_3} + \left[ 1 - \exp\left(\frac{-\lambda n_3 \tau}{\omega(1-\omega)}\right) \right] + \\ & + \ln \frac{\xi_0}{\xi} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{n_3} \left( \ln \xi_0 + \frac{3}{4} \right) + \frac{1-n_3}{n_3} \left( \xi_0^2 - \frac{\xi_1^4}{4} \right); \\ \varphi_2^*(\xi, \tau) \approx & 2\varepsilon_2\tau + \left[ \frac{1-\omega + \frac{\omega}{n_2}}{\lambda\varepsilon_2 n_3} - \omega(1-\omega) \right] \frac{2\omega(1-\omega)\varepsilon_2}{\lambda n_3} + \left[ 1 - \exp\left(\frac{-\lambda n_3 \tau}{\omega(1-\omega)}\right) \right] + \\ & + \frac{1}{n_3} \left( \frac{\xi^2}{2} - \ln \xi - \frac{3}{4} \right) + \frac{1-n_3}{n_3} \left( \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{\xi_1^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

## Литература

1. Подземная гидравлика: учебник для вузов / К.С. Басниев [и др.]. – М. : Недра, 1986. – 303 с.
2. Багир-заде С.Н., Гусейнов Г.П. Керимов А.Г. Исследование нестационарной центрально-симметричной фильтрации жидкости в замкнутых гетерогенных средах // ПМТФ. – 1976. – № 3. – С. 98–105.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 852–864.
4. Шарнов А.И. Постановка задач плоскорадиальной фильтрации в гетерогенном по проницаемости трещиновато-пористом пласте // В книге: Наука и технологии в нефтегазовом деле. Тезисы докладов Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию Кубанского государственного технологического университета и 25-летию кафедры машин и оборудования нефтяных и газовых промыслов Армавирского механико-технологического института. – 2018. – С. 156–158.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М. : Наука, 1974. – 542 с.

## References

1. Underground hydraulics: a textbook for universities / K.S. Basniev [et al.]. – M. : Nedra, 1986. – 303 p.
2. Bagir-zade S.N., Huseynov G.P. Kerimov A.G. Investigation of non-stationary centrally symmetric fluid filtration in closed heterogeneous media // Prikl. – 1976. – № 3. – P. 98–105.
3. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. On the main ideas of the theory of filtration of homogeneous fluids in fractured rocks // PMM. – 1960. – Vol. 24. – Issue. 5. – P. 852–864.
4. Sharnov A.I. Statement of problems of plane-radial filtration in a fractured-porous reservoir heterogeneous in permeability // In the book: Science and technology in the oil and gas business. Abstracts of the International Scientific and Practical Conference dedicated to the 100th anniversary of the Kuban State Technological University and the 25th anniversary of the Department of Machinery and Equipment for Oil and Gas Fields of the Armavir Mechanics and Technology Institute. – 2018. – P. 156–158.
5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. – M. : Fizmatgiz, 1963. – 1100 p.
6. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral transformations and operational calculus. – M. : Nauka, 1974. – 542 p.