

УДК 62

**АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА
С ОДНИМ КОРНЕМ КРАТНОСТЬЮ ЧЕТЫРЕ И С ОДНИМ КОРНЕМ
КРАТНОСТЬЮ ОДИН ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**



**ANALYSIS OF TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF THE FIFTH ORDER
SYSTEMS WITH ONE ROOT MULTIPLE FOUR AND WITH ONE ROOT
MULTIPLE ONE OF THE CHARACTERISTIC EQUATION**

Добробаба Юрий Петрович

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлина Владислава Анатольевна

кандидат технических наук,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный технологический университет

Чувиллин Никита Александрович

студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Аннотация. Определены переходные характеристики систем пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции. Доказано, что переходные характеристики систем пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени не имеют перерегулирование при условии: постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы пятого порядка, корни характеристического уравнения.

Dobrobaba Yury Petrovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of Department
of Power Supply Industrial Enterprises,
Kuban State Technological University

Zarudny Vladimir Yurievich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of Department
of Information Systems and Programming,
Kuban State Technological University

Chuvilin Nikita Aleksandrovich

Student,
Kuban State Technological University

Annotation. Transient characteristics of systems of the fifth order with one root of multiplicity four and with one root of multiplicity one of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree of the numerator of the transfer function are determined. It is proved that the transient characteristics of systems of the fifth order with one root of multiplicity four and with one root of multiplicity one of the characteristic equation with a polynomial of the first degree do not have overshoot, provided that the time constant of the polynomial of the numerator of the fifth order transfer function is less than or equal to the greater time constant of the denominator of the transfer function.

Keywords: transient response, characteristic equation of the fifth order system, roots of the characteristic equation.

В статье [1] выполнен анализ переходных характеристик систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения.

В данной работе анализируются переходные характеристики системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения.

Передаточная функция систем пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения:

$$W_{40}(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^4 \cdot (T_2 p + 1)},$$

где $T_1 \neq T_2$ – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции пятого порядка.

Корни характеристического уравнения системы с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения:

$$P_{1,4} = -\frac{1}{T_1}; P_5 = -\frac{1}{T_2}.$$

Переходная характеристика системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{50}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_3 \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_4 \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_5 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + K_6.$$

Первая, вторая, третья и четвертая производные переходной характеристики системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} h_{50}^{(1)}(t) &= \left(-\frac{K_1}{T_1} + K_2\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{K_2}{T_1} + 2 \cdot K_3\right) \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ &+ \left(-\frac{K_3}{T_1} + 3 \cdot K_4\right) \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_4}{T_1} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_5}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}; \\ h_{50}^{(2)}(t) &= \left(\frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1} + 2 \cdot K_3\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(\frac{K_2}{T_1^2} - 4 \cdot \frac{K_3}{T_1} + 6 \cdot K_4\right) \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ &+ \left(\frac{K_3}{T_1^2} - 6 \cdot \frac{K_4}{T_1}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_4}{T_1^2} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_5}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}; \\ h_{50}^{(3)}(t) &= \left(-\frac{K_1}{T_1^3} + 3 \cdot \frac{K_2}{T_1^2} - 6 \cdot \frac{K_3}{T_1} + 6 \cdot K_4\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ &+ \left(-\frac{K_2}{T_1^3} + 6 \cdot \frac{K_3}{T_1^2} - 18 \cdot \frac{K_4}{T_1}\right) \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{K_3}{T_1^3} + 9 \cdot \frac{K_4}{T_1^2}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_4}{T_1^3} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_5}{T_2^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}. \\ h_{50}^{(4)}(t) &= \left(\frac{K_1}{T_1^4} - 4 \cdot \frac{K_2}{T_1^3} + 12 \cdot \frac{K_3}{T_1^2} - 24 \cdot \frac{K_4}{T_1}\right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ &+ \left(\frac{K_2}{T_1^4} - 8 \cdot \frac{K_3}{T_1^3} + 36 \cdot \frac{K_4}{T_1^2}\right) \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(\frac{K_3}{T_1^4} - 12 \cdot \frac{K_4}{T_1^3}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_4}{T_1^4} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_5}{T_2^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}. \end{aligned}$$

Так как начальные и конечные значения системы пятого порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = 0; \\ h_{50}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(3)}(0) = 0; \\ h_{50}^{(4)}(0) = 0; \\ h_{50}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечные значения системы пятого порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{50}(0) = K_1 + K_5 + K_6; \\ h_{50}^{(1)}(0) = -\frac{K_1}{T_1} + K_2 - \frac{K_5}{T_2}; \\ h_{50}^{(2)}(0) = \frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1} + 2 \cdot K_3 + \frac{K_5}{T_2^2}; \\ h_{50}^{(3)}(0) = -\frac{K_1}{T_1^3} + 3 \cdot \frac{K_2}{T_1^2} - 6 \cdot \frac{K_3}{T_1} + 6 \cdot K_4 - \frac{K_5}{T_2^3}; \\ h_{50}^{(4)}(0) = \frac{K_1}{T_1^4} - 4 \cdot \frac{K_2}{T_1^3} + 12 \cdot \frac{K_3}{T_1^2} - 24 \cdot \frac{K_4}{T_1} + \frac{K_5}{T_2^4}; \\ h_{50}(\infty) = K_6, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$$K_6 = 1;$$

$$\begin{cases} K_1 + K_5 + 1 = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1} + K_2 - \frac{K_5}{T_2} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1} + 2 \cdot K_3 + \frac{K_5}{T_2^2} = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1^3} + 3 \cdot \frac{K_2}{T_1^2} - 6 \cdot \frac{K_3}{T_1} + 6 \cdot K_4 - \frac{K_5}{T_2^3} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^4} - 4 \cdot \frac{K_2}{T_1^3} + 12 \cdot \frac{K_3}{T_1^2} - 24 \cdot \frac{K_4}{T_1} + \frac{K_5}{T_2^4} = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения имеют вид:

$$K_1 = -\frac{T_1^3 - 4T_1^2T_2 + 6T_1T_2^2 - 4T_2^3}{(T_1 - T_2)^4} \cdot T_1;$$

$$K_2 = -\frac{T_1^2 - 3T_1T_2 + 3T_2^2}{(T_1 - T_2)^3};$$

$$K_3 = -\frac{T_1 - 2T_2}{2T_1 \cdot (T_1 - T_2)^2};$$

$$K_4 = -\frac{1}{6T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)};$$

$$K_5 = -\frac{T_2^4}{(T_1 - T_2)^4}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{50}(t) = -\frac{T_1^3 - 4T_1^2T_2 + 6T_1T_2^2 - 4T_2^3}{(T_1 - T_2)^4} \cdot T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1^2 - 3T_1T_2 + 3T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1 - 2T_2}{2T_1 \cdot (T_1 - T_2)^2} \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} -$$

$$-\frac{1}{6T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2^4}{(T_1 - T_2)^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1;$$

$$h_{50}^{(1)}(t) = -\frac{T_2^3}{(T_1 - T_2)^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} \cdot \frac{t}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} -$$

$$-\frac{T_2}{2 \cdot (T_1 - T_2)^2} \cdot \frac{t^2}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{6 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot \frac{t^3}{T_1^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^3}{(T_1 - T_2)^4} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Передаточная функция системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{51}(p) = \frac{\tau p + 1}{(T_1 p + 1)^4 \cdot (T_2 p + 1)},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка.

Переходная характеристика системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{51}(t) = -\left[\frac{T_1^3 - 4T_1^2T_2 + 6T_1T_2^2 - 4T_2^3}{(T_1 - T_2)^4} \cdot T_1 + \frac{T_2^3 \tau}{(T_1 - T_2)^4} \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} +$$

$$+ \left[-\frac{T_1^2 - 3T_1T_2 + 3T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} + \frac{T_2^2 \tau}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)^3} \right] \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \left[\frac{T_1 - 2T_2}{2T_1 \cdot (T_1 - T_2)^2} + \frac{T_2 \tau}{2T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)^2} \right] \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} +$$

$$+ \left[-\frac{1}{6T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)} + \frac{\tau}{6T_1^3 \cdot (T_1 - T_2)} \right] \cdot t^3 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left[-\frac{T_2^4}{(T_1 - T_2)^4} + \frac{T_2^3 \tau}{(T_1 - T_2)^4} \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Рассмотрим два варианта значения корней переходной характеристики системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе.

Вариант первый: $T_1 > T_2$.

При этом, если $\tau = T_1$, то

$$h_{51}(t) = -\frac{T_1^2 - 3T_1T_2 + 3T_2^2}{(T_1 - T_2)^3} \cdot T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1 - 2T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{2T_1(T_1 - T_2)} \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^3}{(T_1 - T_2)^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Предположим $T_1 = \frac{9}{40}T$ и $T_2 = \frac{1}{10}T$.

При $\tau=0$

$$h_{51}(t) = -\frac{369}{625} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{168}{25} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{32}{9} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{6400}{243} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{256}{625} \cdot e^{-10\frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau=T_1$

$$h_{51}(t) = -\frac{189}{125} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{8}{5} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - \frac{160}{9} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} + \frac{64}{125} \cdot e^{-10\frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau=2T_1$

$$h_{51}(t) = -\frac{1521}{625} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} + \frac{88}{25} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} - 32 \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} + \frac{6400}{243} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-\frac{40}{9}\frac{t}{T}} + \frac{896}{625} \cdot e^{-10\frac{t}{T}} + 1.$$

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 1.

При этом $T_1 = \frac{9}{40}T$ и $T_2 = \frac{1}{10}T$.

Таблица 1 – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{51}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_1$	$\tau = 2T_1$
0	0	0	0
0,25	0,010353862	0,04684054	0,083327218
0,5	0,116048812	0,2712673	0,426485789
0,75	0,331188914	0,546795376	0,762401838
1	0,563078449	0,754701456	0,946324463
1,25	0,744900766	0,879038126	1,013175486
1,5	0,863116288	0,944116261	1,025116234
1,75	0,931129444	0,975384463	1,019639483
2	0,967045428	0,989543023	1,012040617
2,25	0,984849571	0,995681922	1,006514273
2,5	0,993257631	0,998257028	1,003256425
2,75	0,997079075	0,99930946	1,001539845
3	0,998762852	0,999730642	1,000698431
3,25	0,99948598	0,999896306	1,000306632
3,5	0,999789932	0,999960529	1,000131126
3,75	0,999915375	0,999985122	1,000054869
4	0,999966336	0,999994439	1,000022543
4,25	0,999986756	0,999997937	1,000009118
4,5	0,999994841	0,99999924	1,000003639
4,75	0,999998008	0,999999722	1,000001435
5	0,999999237	0,999999899	1,00000056

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ .

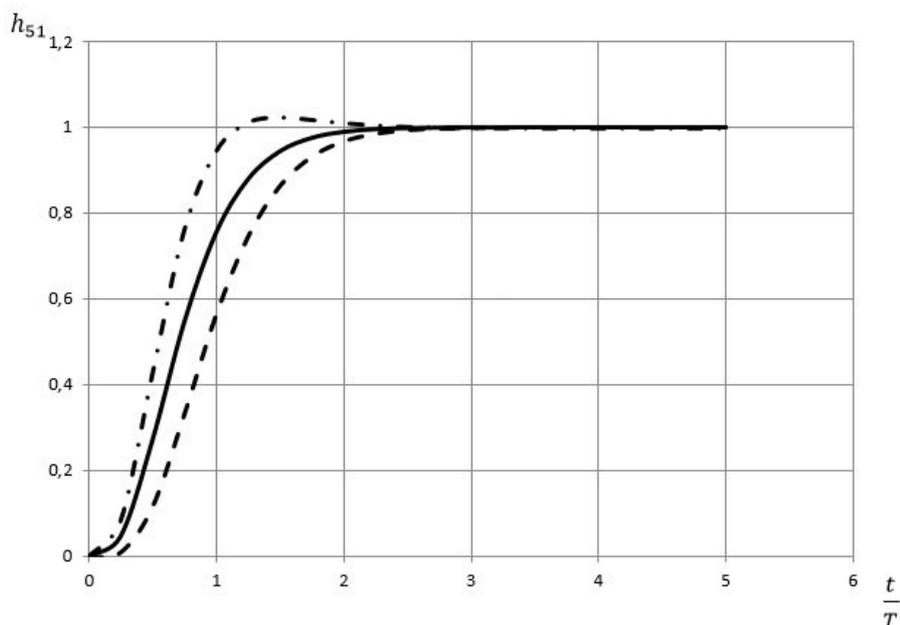


Рисунок 1 – Зависимость h_{51} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Вариант второй: $T_1 < T_2$.

При этом, если $\tau = T_2$, то

$$h_{51}(t) = -e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{T_1^3} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + 1.$$

Предположим $T_1 = \frac{3}{20}T$ и $T_2 = \frac{2}{5}T$.

При $\tau=0$

$$h_{51}(t) = \frac{3471}{625} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{516}{25} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{104}{3} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{800}{27} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{4096}{625} \cdot e^{-\frac{5}{2} \frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau=T_2$

$$h_{51}(t) = -e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{20}{3} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{200}{9} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{4000}{81} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + 1.$$

При $\tau=2T_1$

$$h_{51}(t) = -\frac{4721}{625} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{2548}{75} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{712}{9} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} - \frac{10400}{81} \cdot \frac{t^3}{T^3} \cdot e^{-\frac{20}{3} \frac{t}{T}} + \frac{4096}{625} \cdot e^{-\frac{5}{2} \frac{t}{T}} + 1.$$

Проведена вторая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 2.

При этом $T_1 = \frac{3}{20}T$ и $T_2 = \frac{2}{5}T$.

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунке 2 представлены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ .

Таблица 2 – Результаты второй серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{31}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_1$	$\tau = T$
0	0	0	0
0,25	0,012321242	0,088267152	0,160278153
0,5	0,129937374	0,427014008	0,721117809
0,75	0,352310475	0,734974085	1,116374329
1	0,577208254	0,899116276	1,220600087
1,25	0,746521644	0,966226605	1,185806373
1,5	0,855613003	0,989663949	1,123680846
1,75	0,920131741	0,997038364	1,073936234
2	0,956526531	0,999192981	1,041857272
2,25	0,976536861	0,999788621	1,023039866
2,5	0,987391145	0,999946373	1,012501481
2,75	0,993238446	0,999986748	1,006735022
3	0,996377737	0,999996796	1,003615849
3,25	0,998060408	0,99999924	1,00193807
3,5	0,998961638	0,999999823	1,001038007
3,75	0,999444165	0,999999959	1,000555753
4	0,999702474	0,999999991	1,000297508
4,25	0,999840744	0,999999998	1,000159252
4,5	0,999914756	1	1,000085243
4,75	0,999954372	1	1,000045628
5	0,999975577	1	1,000024423

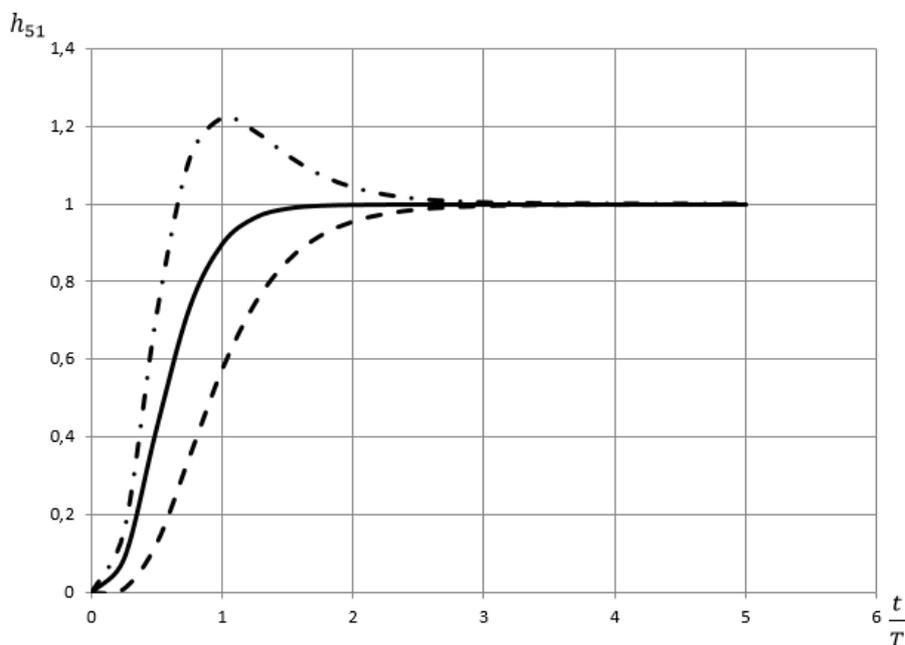


Рисунок 2 – Зависимость h_{51} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Выводы

Для систем пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции определены переходные характеристики.

Проведены первый и второй численные эксперименты, на основании которых получены зависимости переходных характеристик системы пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и с одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ .

Установлено: если постоянная времени полинома числителя передаточной функции пятого порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции, то переходные характеристики систем пятого порядка с одним корнем кратностью четыре и одним корнем кратностью один характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции не имеют перерегулирования.

Литература

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем пятого порядка с кратными корнями характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1.

References

1. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Serkin A.D. Analysis of the transient characteristics of fifth order systems with multiple roots of the characteristic equation // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 1.