УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

♦♦♦♦♦

ANALYSIS OF TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF THE THIRD ORDER SYSTEM WITH REAL NEGATIVE DIFFERENT ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Dobrobaba Yuriy Petrovich
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of the Department
of Power Supply of Industrial Enterprises,
Kuban State Technological University

Мурлина Владислава Анатольевна
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Murlina Vladislava Anatolievna
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor, Associate professor
of department of information systems
and programming,
Kuban state technological university

Щелканов Глеб Владимирович
студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Shchelkanov Gleb Vladimirovich
Student,
Kuban state technological university

Асланова Диана Александровна
студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Aslanova Diana Aleksandrovna
Student,
Kuban state technological university

Аннотация. Определены переходные характеристики системы четвертого порядка с двумя кратными и действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции.
Доказано, что переходные характеристики систем третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени не имеют перерегулирование при условии: постоянная времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы третьего порядка, корни характеристического уравнения.

Annotation. The transient characteristics of the fourth-order systems with two multiply and real negative different roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree of the numerator of the transfer function are determined.
It is proved that the transient characteristics of third-order with two multiply roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree do not overshoot: time constant of the numerator polynomial of the transfer function of the third order is less than or equal to the larger time constant of the denominator of the transfer function.

Keywords: transient response, characteristic equation of the second order system, roots of the characteristic equation.

В статье [1] выполнен анализ переходных характеристик систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения.

В статье [2] выполнен анализ переходных характеристик систем третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения.

В данной работе анализируются переходные характеристики системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения.

Передаточная функция системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{30}(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)^2 \cdot (T_2 p + 1)},$$

где $T_1 \neq T_2$ – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции третьего порядка.

Корни характеристического уравнения системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения:

$$P_{1;2} = -\frac{1}{T_1};\ P_3 = -\frac{1}{T_2}.$$

Переходная характеристика системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + K_4.$$

Первая и вторая производные переходной характеристики системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения имеют вид:

$$h_{30}^{(1)}(t) = (-\frac{K_1}{T_1} + K_2) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_2}{T_1} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_3}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}};$$

$$h_{30}^{(2)}(t) = (\frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1}) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_2}{T_1^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_3}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Так как начальные и конечное значения системы третьего порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = 0; \\ h_{30}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{30}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{30}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения системы третьего порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = K_1 + K_3 + K_4; \\ h_{30}^{(1)}(0) = -\frac{K_1}{T_1} + K_2 - \frac{K_3}{T_2}; \\ h_{30}^{(2)}(0) = \frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1} + \frac{K_3}{T_2^2}; \\ h_{30}(\infty) = K_4, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$$K_4 = 1;$$

$$\begin{cases} K_1 + K_3 + 1 = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1} + K_2 - \frac{K_3}{T_2} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^2} - 2 \cdot \frac{K_2}{T_1} + \frac{K_3}{T_2^2} = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_1 = -\frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2)}{(T_1 - T_2)^2};$$

$$K_2 = -\frac{1}{T_1 - T_2};$$

$$K_3 = -\frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)^2}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{30}(t) = -\frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2)}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1;$$

$$h_{30}^{(1)}(t) = -\frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Передаточная функция системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{31}(p) = \frac{\tau p + 1}{(T_1 p + 1)^2 \cdot (T_1 p + 1)},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка.

Переходная характеристика системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{31}(t) = -\frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2)}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1 -$$

$$-\frac{T_2 \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{\tau}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{31}(t) = -\frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2) + T_2 \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1 - \tau}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} -$$

$$-\frac{T_2 \cdot (T_2 - \tau)}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Рассмотрим два варианта значения корней переходной характеристики системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе.

Вариант первый: $T_1 > T_2$.

Если $\tau = T_1$, то:

$$h_{31}(t) = -\frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Вариант второй: $T_1 < T_2$.

Если $\tau = T_2$, то:

$$h_{31}(t) = -e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + 1.$$

Если $h_{31}(t_*) = 1$, то:

$$[T_1^2 \cdot (T_1 - 2T_2) + T_1 T_2 \tau] \cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} + (T_1 - T_2) \cdot (T_1 - \tau) \cdot t_* \cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} + T_1 T_2 \cdot (T_2 - \tau) \cdot e^{-\frac{t_*}{T_2}} = 0;$$

или

$$T_1 [T_1 \cdot (T_1 - 2T_2) + T_2 \tau] \cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} + (T_1 - T_2) \cdot (T_1 - \tau) \cdot t_* \cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} + T_1 T_2 \cdot (T_2 - \tau) \cdot e^{-\frac{t_*}{T_2}} = 0,$$

где t_* – время, за которое переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции достигает единичного значения.

При этом должны выполняться условие:
$\tau > T_1$, для первого варианта;
$\tau > T_2$, для второго варианта.

Первая производная переходной характеристики системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{31}^{(1)}(t) = \frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2) + T_2\tau}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1 - \tau}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} +$$

$$+ \frac{T_1 - \tau}{T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}};$$

$$h_{31}^{(1)}(t) = -\frac{T_2 - \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_1 - \tau}{T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} +$$

$$+ \frac{T_2 - \tau}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}}$ первая производная переходной характеристики равна нулю, то справедливо уравнение:

$$\frac{T_1 \cdot (T_1 - 2T_2) + T_2\tau - (T_1 - \tau) \cdot (T_1 - T_2)}{T_1 \cdot (T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + \frac{(T_1 - \tau)}{T_1^2 \cdot (T_1 - T_2)} \cdot t_{\text{экстр}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + \frac{(T_2 - \tau)}{(T_1 - T_2)^2} \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_2}} = 0;$$

$$T_1^2 \cdot (\tau - T_2) \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + (T_1 - \tau) \cdot (T_1 - T_2) \cdot t_{\text{экстр}} \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + T_1^2 \cdot (T_2 - \tau) \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_2}} = 0.$$

В работе принято условие, что:

$$2T_1 + T_2 = T,$$

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 1.

При этом $T_1 = 0{,}4\,T$ и $T_2 = 0{,}2\,T$.

Таблица 1 – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{31}		
	τ = 0	$\tau = T_1$	τ = T
1	2	3	4
0	0	0	0
0,25	0,044418419	0,215981939	0,473327222
0,5	0,20165301	0,509075405	0,970208998
0,75	0,40140113	0,718467517	1,189917837
1	0,58283706	0,84256795	1,232164284
1,25	0,723463711	0,914056587	1,199945901
1,5	0,823063823	0,953517593	1,149198248
1,75	0,889695295	0,974982177	1,1029125
2	0,932575131	0,986569506	1,06756107
2,25	0,959413158	0,992799881	1,042879966
2,5	0,975865597	0,996142819	1,026558651
2,75	0,98579109	0,997934473	1,016149546
3	0,991703428	0,998894137	1,0096802
3,25	0,995189185	0,999407999	1,005736217

Окончание таблицы 1

1	2	3	4
3,5	0,997226902	0,999683102	1,003367403
3,75	0,998409651	0,999830371	1,001961451
4	0,999091999	0,999909202	1,001135306
4,25	0,999483606	0,999951399	1,000653087
4,5	0,999707336	0,999973985	1,000373961
4,75	0,999834645	0,999986075	1,00021322
5	0,999906834	0,999992547	1,000121116

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

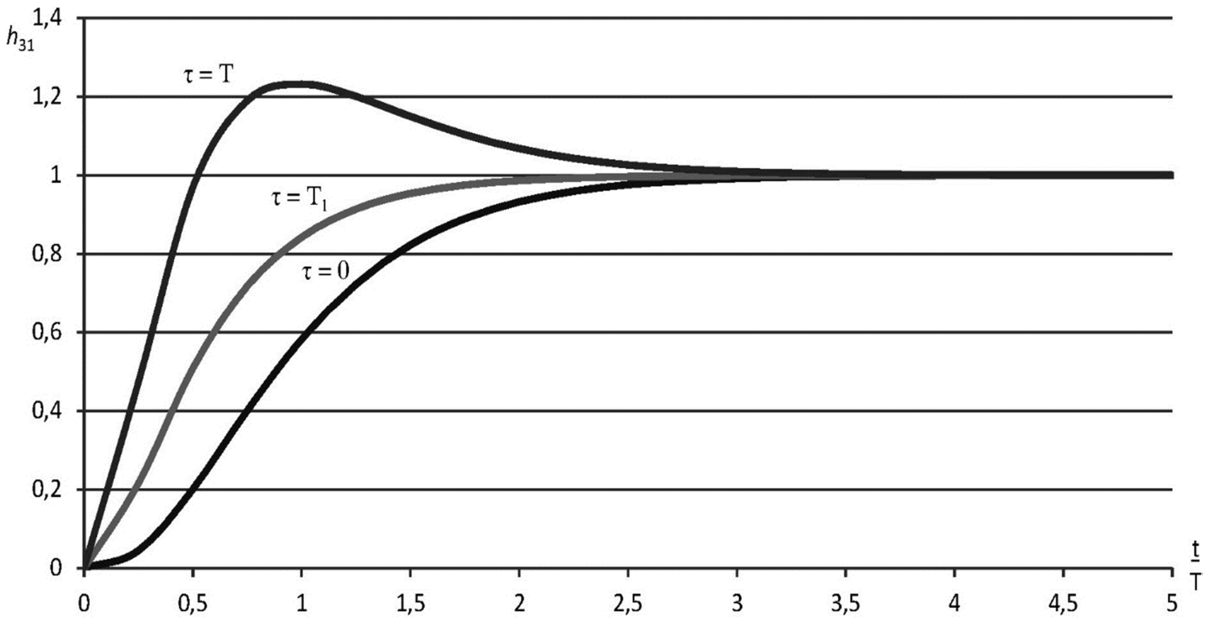

Рисунок 1 – Зависимость h_{31} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена вторая серия численного эксперимента.

$T_1 = 0{,}4\,T$; $T_2 = 0{,}2\,T$.

Если $\tau = 0{,}6\,T$, то:

$t_* = 1{,}1554813T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}5682762T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}01904115$.

Если $\tau = 0{,}7\,T$, то:

$t_* = 0{,}8546271\,T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}2788237\,T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}057144987$.

Если $\tau = 0{,}8\,T$, то:

$t_* = 0{,}6942174T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}1285757T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}108412453$.

Если $\tau = 0{,}9\,T$, то:

$t_* = 0{,}5927671\,T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}0359716\,T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}167862602$.

Если $\tau = T$, то:

$t_* = 0{,}5220647\,T$; $t_{\text{экстр}} = 0{,}9729937\,T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}232606906$.

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

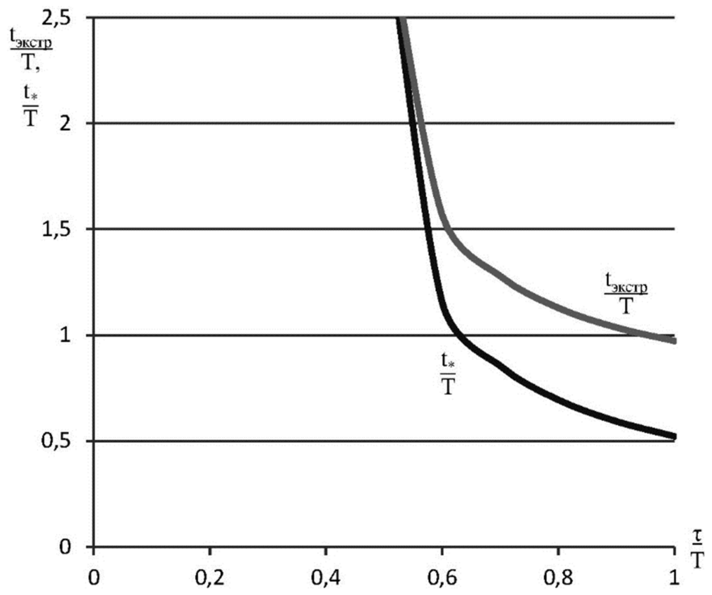

Рисунок 2 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

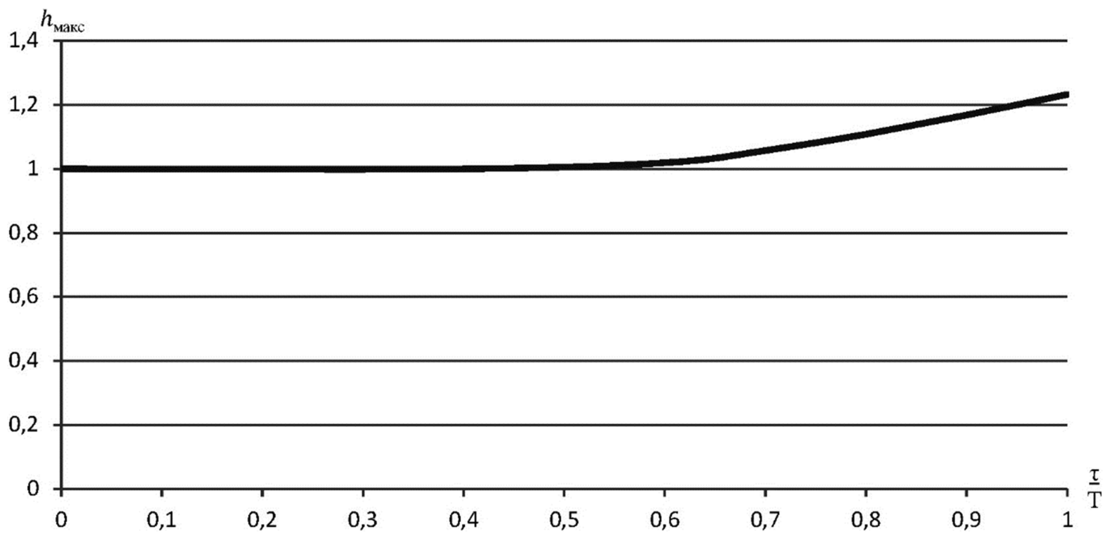

Рисунок 3 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Проведена третья серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 2.

При этом $T_1 = 0{,}25\,T$ и $T_2 = 0{,}5\,T$.

Таблица 2 – Результаты третьей серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{31}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_2$	$\tau = T$
1	2	3	4
0	0	0	0
0,25	0,045395126	0,264241118	0,483087109
0,5	0,20515865	0,593994151	0,98282965

Окончание таблицы 2

1	2	3	4
0,75	0,406201769	0,800851727	1,195501685
1	0,586868339	0,908421807	1,229975273
1,25	0,725503636	0,959572318	1,193581054
1,5	0,823160497	0,982648735	1,142136974
1,75	0,888329287	0,992704944	1,097080603
2	0,930427534	0,996980836	1,063534139
2,25	0,957044931	0,998765902	1,040486872
2,5	0,973638411	0,999500601	1,02536309
2,75	0,983886739	0,999799579	1,01571242
3	0,990177155	0,999920125	1,009663096
3,25	0,994022408	0,999968356	1,005914302
3,5	0,996366608	0,999987539	1,003608446
3,75	0,99779317	0,999995105	1,002197041
4	0,998660288	0,999998086	1,001335886
4,25	0,999186955	0,999999255	1,000811555
4,5	0,999506681	0,999999711	1,000492741
4,75	0,999700716	0,999999888	1,00029906
5	0,999818447	0,999999957	1,000181467

По результатам третьей серии численного эксперимента на рисунке 4 представлены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

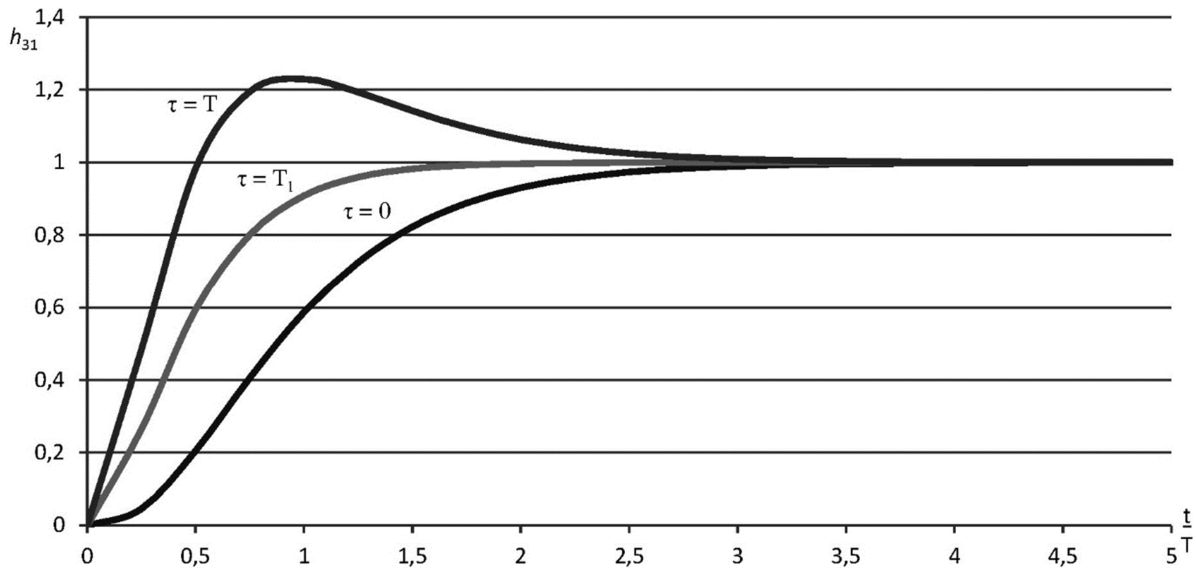

Рисунок 4 – Зависимость h_{31} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена четвертая серия численного эксперимента.

$T_1 = 0{,}25\,T$; $T_2 = 0{,}5\,T$.

Если$\tau = 0{,}6\,T$, то:

$t_* = 1{,}1742426\,T$; $\quad t_{экстр} = 1{,}5661327\,T$; $\quad h_{макс} = 1{,}010539362$.

Если $\tau = 0{,}7\,T$, то:

$t_* = 0{,}8462624\,T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}2543632\,T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}039574583$.

Если $\tau = 0{,}8\,T$, то:

$t_* = 0{,}6833256T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}1038616T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}080519248$.

Если $\tau = 0{,}9\,T$, то:

$t_* = 0{,}5824058T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}0130933T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}129817553$.

Если $\tau = T$, то:

$t_* = 0{,}5126571T$; $t_{\text{экстр}} = 0{,}9519068T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}185200745$.

По результатам четвертой серии численного эксперимента на рисунках 5 и 6 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

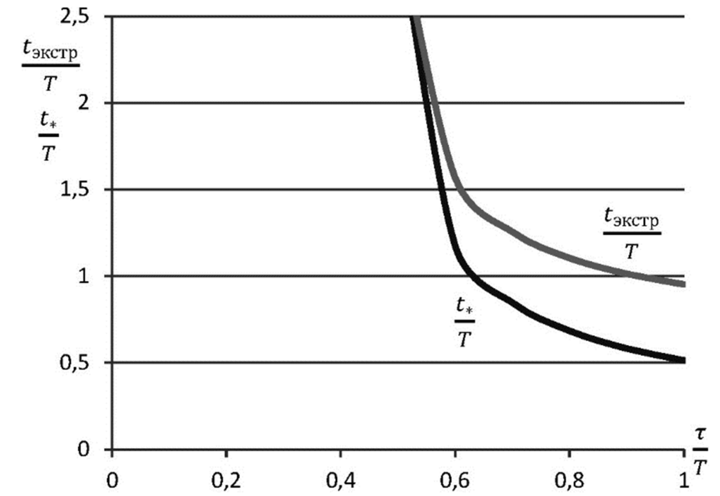

Рисунок 5 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

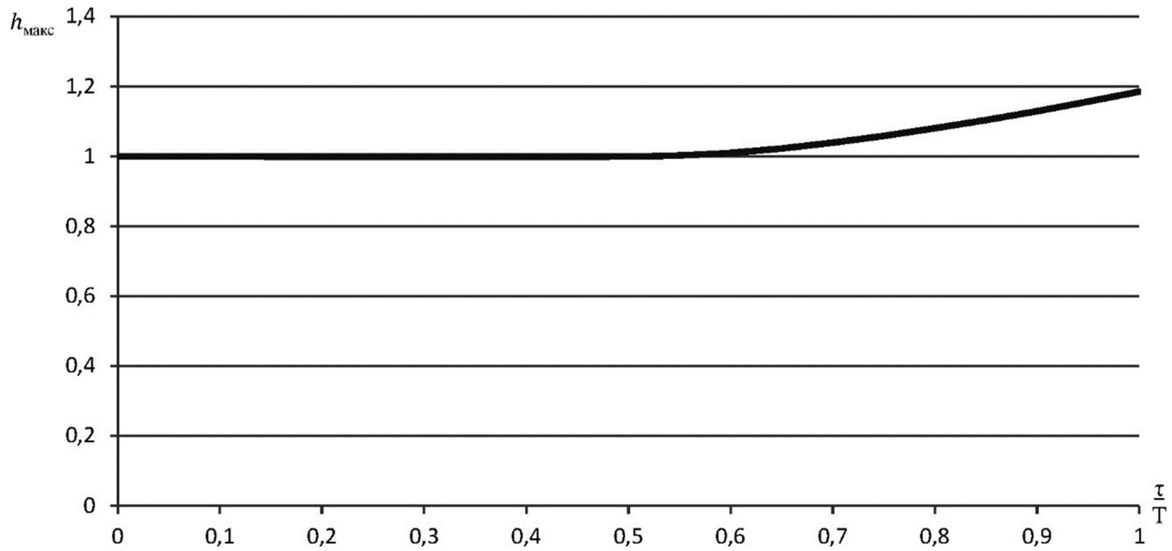

Рисунок 6 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Выводы

Для систем третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции определены переходные характеристики.

Проведены первый и третий численные эксперименты, на основании которых получены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

Установлено, что при условии $\tau \leq T_1$ переходные характеристики систем третьего порядка с двумя кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции не имеет перерегулирования.

Литература

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения / Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1.
2. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Щелканов Г.В. Анализ переходных характеристик систем четвертого порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения / Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 3.

References

1. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Serkin A.D. Analysis of the transient characteristics of fourth order systems with multiple roots of the characteristic equation / Science. Engineering.Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 1.
2. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Shchelkanov G.V. Analysis of the transient characteristics of fourth order systems with realnegativedifferent roots of the characteristic equation / Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 3.