УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РАЗНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

–––––––

ANALYSIS OF TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF THE THIRD ORDER SYSTEM WITH REAL NEGATIVE DIFFERENT ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович
кандидат техническихнаук, доцент,
профессор кафедры
электроснабжения промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлин Алексей Георгиевич
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Щелканов Глеб Владимирович
студент,
Кубанский государственный
технологический университет
pchn257@mail.ru

Dobrobaba Yury Petrovich
Candidate of technical sciences,
Associate Professor,
Professor of department
of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

Murlin Aleksey Georgievich
Candidate of technical sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of department
of information systems and programming,
Kuban state technological university

Shchelkanov Gleb Vladimirovich
Student,
Kuban state technological university
pchn257@mail.ru

Аннотация. Определены переходные характеристики систем третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции.
Доказано, что переходные характеристики систем третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени не имеют перерегулирование при условии: постоянная времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы третьего порядка, корни характеристического уравнения.

Annotation. The transient characteristics of the third-order systems with different roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree of the numerator of the transfer function are determined.
It is proved that the transient characteristics of third-order with different roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree do not overshoot: time constant of the numerator polynomial of the transfer function of the third order is less than or equal to the larger time constant of the denominator of the transfer function.

Keywords: transient response, characteristic equation of the second order system, roots of the characteristic equation.

В статье [1] выполнен анализ переходных характеристик систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения. В данной работе анализируются переходные характеристики системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения.

Передаточная функция системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{30}(p) = \frac{1}{(T_1 p+1)\cdot(T_2 p+1)\cdot(T_3 p+1)},$$

где $T_1 > T_2 > T_3$ – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции третьего порядка.

Корни характеристического уравнения системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения:

$$P_1 = -\frac{1}{T_1};\ P_2 = -\frac{1}{T_2};\ P_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Переходная характеристика системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + K_3 \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + K_4.$$

Первая и вторая производные переходной характеристики системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}^{(1)}(t) = -\frac{K_1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_2}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{K_3}{T_3} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}};$$

$$h_{30}^{(2)}(t) = \frac{K_1}{T_1^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K_2}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{K_3}{T_3^2} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

Так как начальные и конечное значения системы третьего порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = 0; \\ h_{30}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{30}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{30}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения системы третьего порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4; \\ h_{30}^{(1)}(0) = -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} - \frac{K_3}{T_3}; \\ h_{30}^{(2)}(0) = \frac{K_1}{T_1^2} + \frac{K_2}{T_2^2} + \frac{K_3}{T_3^2}; \\ h_{30}(\infty) = K_4, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$K_4 = 1;$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 + 1 = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} - \frac{K_3}{T_3} = 0; \\ \frac{K_1}{T_1^2} + \frac{K_2}{T_2^2} + \frac{K_3}{T_3^2} = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_1 = -\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2) \cdot (T_1 - T_3)};$$

$$K_2 = \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2) \cdot (T_2 - T_3)};$$

$$K_3 = -\frac{T_3^2}{(T_1 - T_3) \cdot (T_2 - T_3)}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{30}(t) = -\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} -$$
$$-\frac{T_3^2}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + 1;$$
$$h_{30}^{(1)}(t) = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} +$$
$$+\frac{T_3}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

Передаточная функция системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{31}(p) = \frac{\tau p + 1}{(T_1 p + 1)\cdot(T_2 p + 1)\cdot(T_3 p + 1)},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка.

Переходная характеристика системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{31}(t) = -\frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2^2}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} -$$
$$-\frac{T_3^2}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + 1 +$$
$$+\frac{T_1\tau}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2\tau}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{T_3\tau}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы третьего порядка с тремя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{31}(t) = -\frac{T_1\cdot(T_1 - \tau)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2\cdot(T_2 - \tau)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} -$$
$$-\frac{T_3\cdot(T_3 - \tau)}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + 1.$$

Если $\tau = T_1$, то

$$h_{31}(t) = -\frac{T_2}{T_2 - T_3}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_3}{T_2 - T_3}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + 1.$$

Если $h_{31}(t_*) = 1$, то

$$T_1\cdot(T_2 - T_3)\cdot(\tau - T_1)\cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} - T_2\cdot(T_1 - T_3)\cdot(\tau - T_2)e^{-\frac{t_*}{T_2}} + T_3\cdot(T_1 - T_2)\cdot(\tau - T_3)\cdot e^{-\frac{t_*}{T_3}} = 0;$$

где t_* – время, за которое переходная характеристика системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие: $\tau > T_1$.

Первая производная переходной характеристики системы третьего порядка с тремя разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{31}^{(1)}(t) = -\frac{(\tau - T_1)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{(\tau - T_2)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{(\tau - T_3)}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t}{T_3}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}}$ первая производная переходной характеристики равна нулю, то справедливо уравнение:

$$-\frac{(\tau - T_1)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_1 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + \frac{(\tau - T_2)}{(T_1 - T_2)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_2}} -$$

$$-\frac{(\tau - T_3)}{(T_1 - T_3)\cdot(T_2 - T_3)}\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_3}} = 0;$$

$$-(T_2 - T_3)\cdot(\tau - T_1)\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + (T_1 - T_3)\cdot(\tau - T_2)\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_2}} -$$

$$-(T_1 - T_2)\cdot\ (\tau - T_3)\cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_3}} = 0.$$

В работе принято условие, что $T_1 + T_2 + T_3 = T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{31}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_1$	$\tau = \mathrm{T}$
0	0	0	0
0,25	0,057070579	0,313679762	0,570288944
0,5	0,22821758	0,624731552	1,012261592
0,75	0,423283565	0,795711072	1,168138579
1	0,591937356	0,890568469	1,189199581
1,25	0,72129876	0,941418664	1,161538567
1,5	0,814258775	0,968643108	1,12302744
1,75	0,87840311	0,983215819	1,088028528
2	0,921462974	0,991016071	1,06056917
2,25	0,949803775	0,995191249	1,040578723
2,5	0,968183587	0,997426061	1,026668535
2,75	0,979968599	0,99862227	1,01727594
3	0,987457582	0,999262554	1,011067526
3,25	0,99218241	0,999605273	1,007028137
3,5	0,995145865	0,999788718	1,004431571
3,75	0,996995587	0,999886909	1,002778231
4	0,998145493	0,999939467	1,001733442
4,25	0,998857927	0,999967599	1,00107727
4,5	0,999298061	0,999982657	1,000667253
4,75	0,999569308	0,999990717	1,000412126
5	0,999736125	0,999995031	1,000253937

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

Проведена вторая серия численного эксперимента.

$$T_1 = 0{,}5T;\ T_2 = 0{,}4T;\ T_3 = 0{,}1T.$$

Если $\tau = 0{,}6T$, то

$$t_* = 1{,}5153678T;\ t_{\text{экстр}} = 1{,}961658T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}004943846.$$

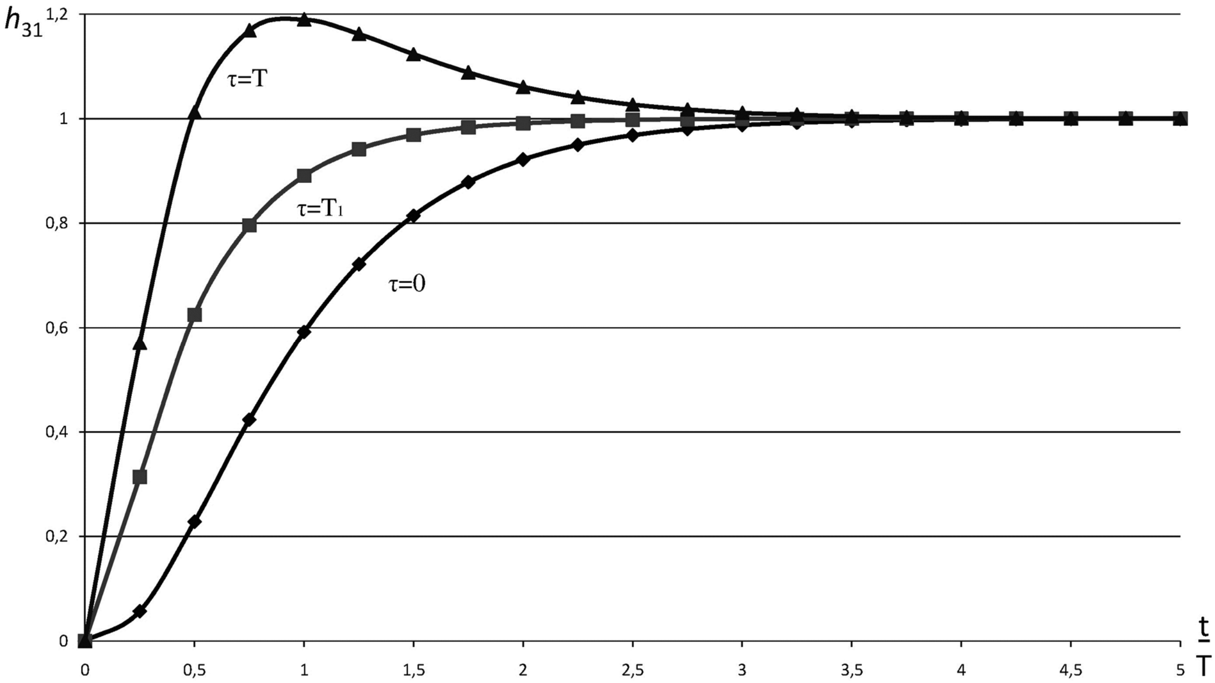

Рисунок 1 – Зависимость h_{21} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Если $\tau = 0{,}7T$, то

$$t_* = 0{,}9397901T;\ \ t_{\text{экстр}} = 1{,}3862638T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}031249523.$$

Если $\tau = 0{,}8T$, то

$$t_* = 0{,}7033212T;\ \ t_{\text{экстр}} = 1{,}1505718T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}075078806.$$

Если $\tau = 0{,}9T$, то

$$t_* = 0{,}5726343T;\ \ t_{\text{экстр}} = 1{,}021274T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}129575488.$$

Если $\tau = T$, то

$$t_* = 0{,}4889228T;\ \ t_{\text{экстр}} = 0{,}9393534T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}190672214.$$

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

Выводы

Получены переходные характеристики систем третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения, как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени числителя передаточной функции.

Проведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

Проведен второй численный эксперимент. На его основании получены:

– зависимость времени, при котором переходная характеристика исследуемой системы достигает значения равного единице;

– зависимость времени (экстремальное), при котором переходная характеристика достигает максимального значения;

– зависимость максимального значения переходной характеристики от постоянной времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка и максимального значения переходной характеристики системы третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции от постоянной времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка в относительных единицах.

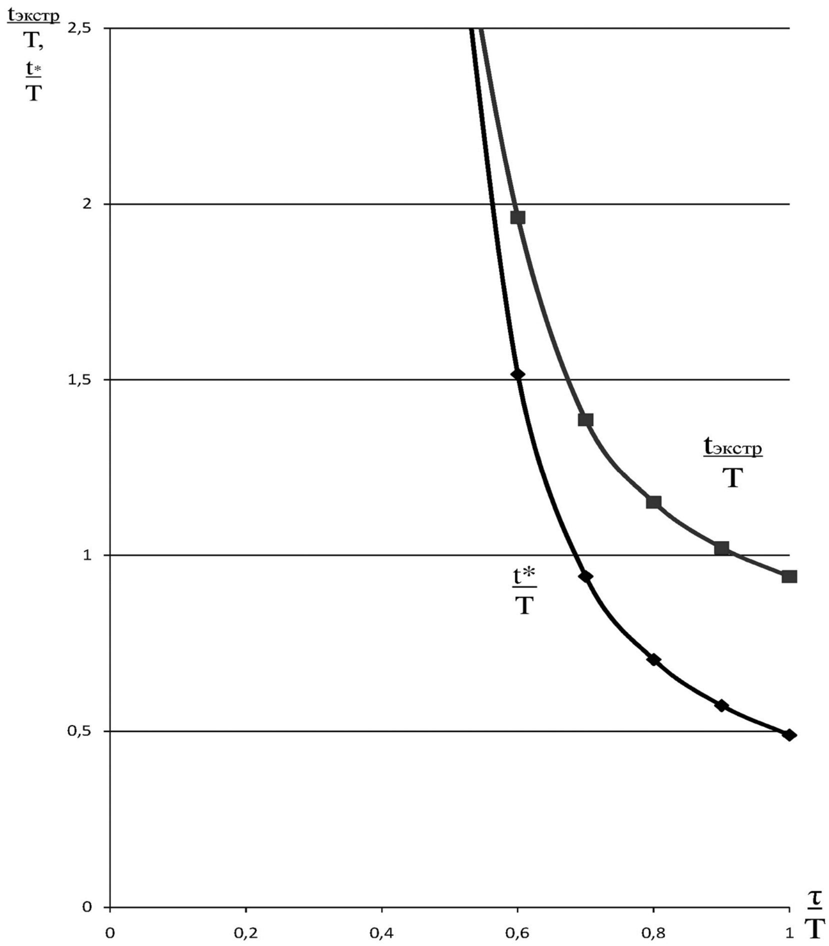

Рисунок 2 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

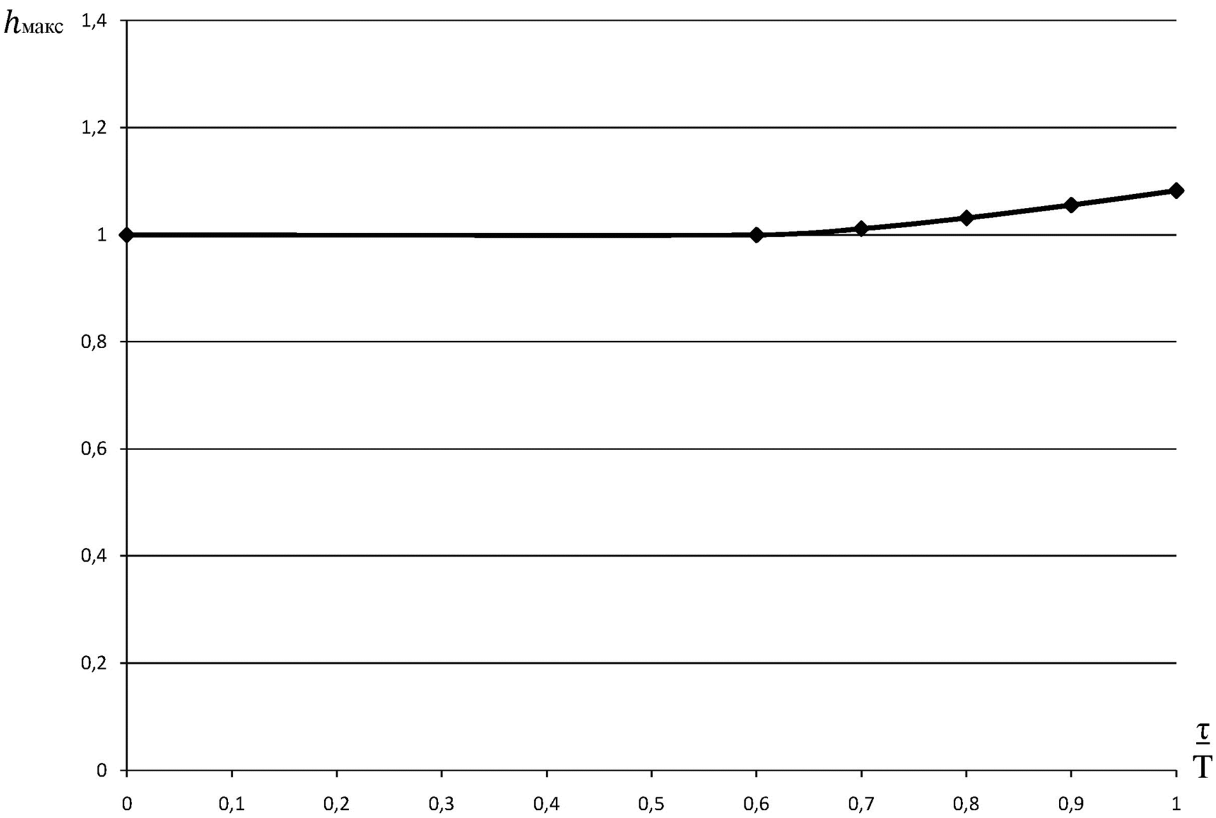

Рисунок 3 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Установлено, что при условии $\tau \leq T_1$ переходные характеристики систем третьего порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции не имеет перерегулирования.

Литература:

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1.

References:

1. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Serkin A.D. Analysis of the transient characteristics of third order systems with multiple roots of the characteristic equation // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 1.