УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РАЗНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

–––––––

ANALYSIS OF TRANSITIONAL CHARACTERISTICS OF THE SECOND ORDER SYSTEM WITH REAL NEGATIVE DIFFERENT ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович
кандидат техническихнаук, доцент,
профессор кафедры
электроснабжения промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлин Алексей Георгиевич
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Щелканов Глеб Владимирович
студент,
Кубанский государственный
технологический университет
pchn257@mail.ru

Dobrobaba Yury Petrovich
Candidate of technical sciences,
Associate Professor,
Professor of department
of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

Murlin Aleksey Georgievich
Candidate of technical sciences,
Associate Professor,
Associate Professor of department
of information systems and programming,
Kuban state technological university

Shchelkanov Gleb Vladimirovich
Student,
Kuban state technological university
pchn257@mail.ru

Аннотация. Определены переходные характеристики систем второго порядка с двумя действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени числителя передаточной функции.
Доказано, что переходные характеристики систем второго порядка с разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени не имеют перерегулирование при условии: постоянная времени полинома числителя передаточной функции второго порядка меньше или равна большей постоянной времени знаменателя передаточной функции.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы второго порядка, корни характеристического уравнения.

Annotation. The transient characteristics of the second-order systems with different roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree of the numerator of the transfer function are determined.
It is proved that the transient characteristics of second-order with different roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree do not overshoot: time constant of the numerator polynomial of the transfer function of the second order is less than or equal to the larger time constant of the denominator of the transfer function.

Keywords: transient response, characteristic equation of the second order system, roots of the characteristic equation.

В статье [1] выполнен анализ переходных характеристик систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения. В данной работе анализируются переходные характеристики системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения.

Передаточная функция системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{20}(p) = \frac{1}{(T_1 p+1)\cdot(T_2 p+1)},$$

где $T_1 > T_2$ – постоянные времени полинома знаменателя передаточной функции второго порядка.

Корни характеристического уравнения системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения:

$$P_1 = -\frac{1}{T_1}; P_2 = -\frac{1}{T_2}.$$

Переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{20}(t) = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + K_3.$$

Первая производная переходной характеристики системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{20}^{(1)}(t) = -\frac{K_1}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{K_2}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Так как начальные и конечное значения системы второго порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{20}(0) = 0; \\ h_{20}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{20}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения системы второго порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{20}(0) = K_1 + K_3; \\ h_{20}^{(1)}(0) = -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2}; \\ h_{20}(\infty) = K_3, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:
$K_3 = 1$;

$$\begin{cases} K_1 + K_2 + 1 = 0; \\ -\frac{K_1}{T_1} - \frac{K_2}{T_2} = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_1 = -\frac{T_1}{T_1 - T_2};$$

$$K_2 = -\frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Таким образом, переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{20}(t) = -\frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1;$$

$$h_{20}^{(1)}(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Передаточная функция системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{21}(p) = \frac{\tau p + 1}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции второго порядка.

Переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{21}(t) = -\frac{T_1}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1 + \frac{\tau}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{\tau}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{21}(t) = -\frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Если $\tau = T_1$, то:

$$h_{21}(t) = -e^{-\frac{t}{T_2}} + 1.$$

Если $h_{21}(t_*) = 1$, то справедливы соотношения:

$$(T_1 - \tau) \cdot e^{-\frac{t_*}{T_1}} = (T_2 - \tau) \cdot e^{-\frac{t_*}{T_2}};$$

$$(T_1 - \tau) \cdot e^{\frac{(T_1-T_2)}{T_1 \cdot T_2} \cdot t_*} = (T_2 - \tau);$$

$$e^{\frac{(T_1-T_2)}{T_1 \cdot T_2} \cdot t_*} = \frac{(\tau - T_1)}{(\tau - T_2)};$$

$$t_* = \frac{T_1 \cdot T_2}{(T_1 - T_2)} \cdot \ln\frac{(\tau - T_1)}{(\tau - T_2)},$$

где t_* – время, за которое переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > T_1$.

Первая производная переходной характеристики системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{21}^{(1)}(t) = -\frac{1}{T_1} \cdot \frac{\tau-T_1}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\tau-T_2}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}}$ первая производная переходной характеристики равна нулю, то справедливо уравнение:

$$-\frac{1}{T_1} \cdot \frac{\tau-T_1}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_1}} + \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\tau-T_2}{T_1-T_2} \cdot e^{-\frac{t_{\text{экстр}}}{T_2}} = 0.$$

Из уравнения следует, что:

$$t_{\text{экстр}} = \frac{T_1 T_2}{T_1-T_2} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\tau-T_1}{\tau-T_2}\right),$$

где $t_{\text{экстр}}$ – время, при котором переходная характеристика системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции достигает максимального значения.

В работе принято условие, что $T_1 + T_2 = T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{21}		
	$\tau = 0$	$\tau = T_1$	$\tau = T$
0	0	0	0
0,25	0,109142754	0,632120559	0,806446494
0,5	0,297541963	0,864664716	1,053705635
0,75	0,473074373	0,950212931	1,109259119
1	0,613762112	0,981684361	1,104325111
1,25	0,720055569	0,993262053	1,084330881
1,5	0,798236452	0,997521247	1,063949514
1,75	0,85499799	0,999088118	1,047118161
2	0,895942555	0,999664537	1,034237786
2,25	0,925381102	0,99987659	1,024708419
2,5	0,94651171	0,9999546	1,017768897
2,75	0,961666051	0,999983298	1,012755714
3	0,972529614	0,999993855	1,009148603
3,25	0,980316667	0,999997739	1,006558474
3,5	0,985895072	0,999999168	1,004700534
3,75	0,989893233	0,999999694	1,003368514
4	0,992758131	0,999999887	1,002413806
4,25	0,994810954	0,999999958	1,001729627
4,5	0,996281879	0,999999984	1,001239353
4,75	0,997335847	0,999999994	1,000888044
5	0,99809105	0,999999997	1,000636314

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

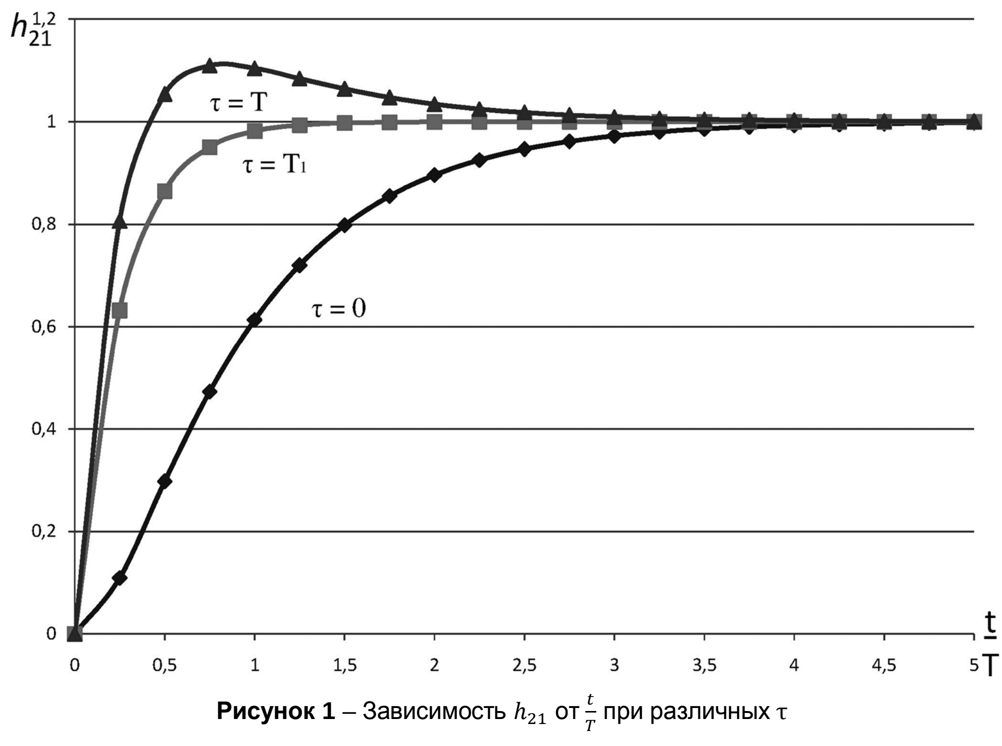

Рисунок 1 – Зависимость h_{21} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена вторая серия численного эксперимента.
Если$\tau = 0{,}75T$, то

$$t_* = \infty;\ t_{\text{экстр}} = \infty;\ h_{\text{макс}} = 1.$$

Если $\tau = 0{,}8T$, то

$$t_* = 0{,}8992107 21T;\ t_{\text{экстр}} = 1{,}311190336T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}011605176.$$

Если $\tau = 0{,}85T$, то

$$t_* = 0{,}671909801T;\ t_{\text{экстр}} = 1{,}083889409T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}031426968.$$

Если $\tau = 0{,}9T$, то

$$t_* = 0{,}5498764T;\ t_{\text{экстр}} = 0{,}961856009T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}05547002.$$

Если $\tau = 0{,}95T$, то

$$t_* = 0{,}469786113T;\ t_{\text{экстр}} = 0{,}8817657 21T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}08229512.$$

Если $\tau = T$, то

$$t_* = 0{,}4119799608T;\ t_{\text{экстр}} = 0{,}823959216T;\ h_{\text{макс}} = 1{,}111111111.$$

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

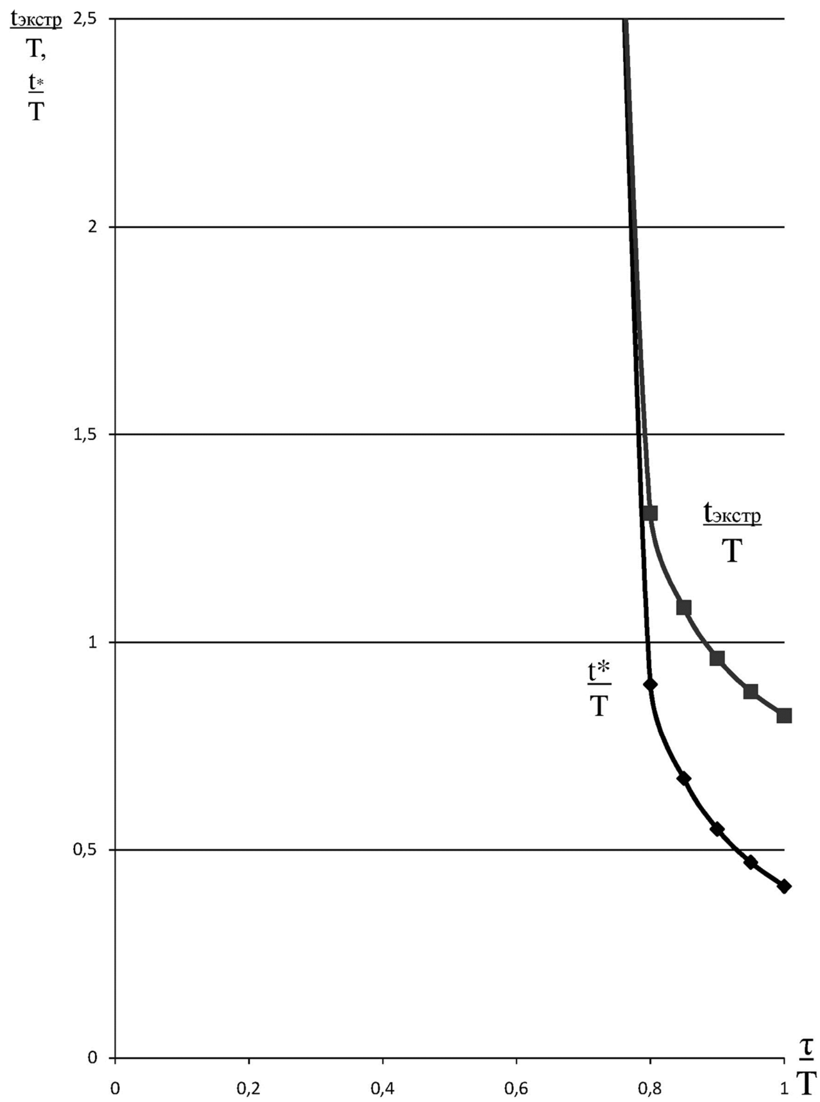

Рисунок 2 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

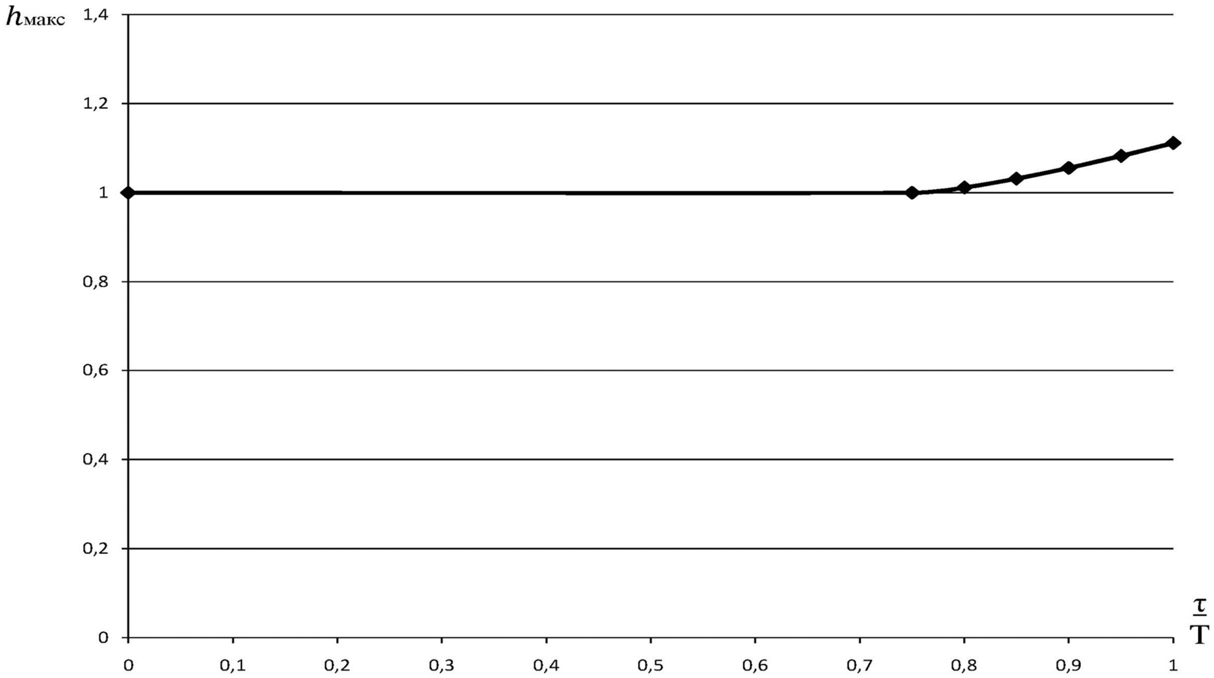

Рисунок 3 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Выводы

Получены переходные характеристики систем второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения, как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени числителя передаточной функции.

Проведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе передаточной функции при различных значениях τ.

Проведен второй численный эксперимент. На его основании получены:

– зависимость времени, при котором переходная характеристика исследуемой системы достигает значения равного единице;

– зависимость времени (экстремальное), при котором переходная характеристика достигает максимального значения;

– зависимость максимального значения переходной характеристики от постоянной времени полинома числителя передаточной функции второго порядка и максимального значения переходной характеристики системы второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции от постоянной времени полинома числителя передаточной функции второго порядка в относительных единицах.

Установлено, что при условии $\tau \leq T_1$переходные характеристики систем второго порядка с действительными отрицательными разными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени числителя передаточной функции не имеет перерегулирования.

Литература:

1. Добробаба Ю.П., Мурлин А.Г., Серкин А.Д. Анализ переходных характеристик систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2019. – № 1.

References:

1. Dobrobaba Y.P., Murlin A.G., Serkin A.D. Analysis of the transient characteristics of second order systems with multiple roots of the characteristic equation // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2019. – № 1.