УДК 62

# АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

–––––––

# THE ANALYSIS OF TRANSITIONAL FEATURES OF THE SYSTEM OF THE FOURTH ORDER WITH MULTIPLE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

**Добробаба Юрий Петрович**
кандидат технических наук, доцент,
профессор кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

**Dobrobaba Yury Petrovich**
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Professor of department
of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

**Мурлин Алексей Георгиевич**
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

**Murlin Aleksey Georgievich**
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Associate professor of department
of information systems and programming,
Kuban state technological university

**Серкин Александр Дмитриевич**
студент,
Кубанский государственный
технологический университет

**Serkin Aleksandr Dmitrievich**
Student,
Kuban state technological university

**Аннотация.** Определены переходные характеристики систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени.
Установлено, чтопереходные характеристики систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование при условии $\tau > \frac{1}{4}T$.

**Ключевые слова:** переходная характеристика, характеристическое уравнение системы четвертого порядка, корни характеристического уравнения.

**Annotation**. The transient characteristics of the fourth-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree are identified.
It is determined that the transient characteristics of fourth-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of the first degree have overshoot under the condition $\tau > \frac{1}{4}T$.

**Keywords:** transient response, characteristic equation of the fourth order system, roots of the characteristic equation.

Передаточная функция системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения выглядит следующим образом:

$$W_{40}(p) = \frac{1}{\frac{1}{256}T^4p^4+\frac{1}{16}T^3p^3+\frac{3}{8}T^2p^2+Tp+1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}Tp+1\right)^4},$$

где $T$ – постоянная времени полинома знаменателя передаточной функции четвертого порядка.

Корни характеристического уравнения системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения: $Tp_{1\div 4} = -4$.

Переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет следующий вид:

$$h_{40}(t) = K_1 \cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + K_3 \cdot t^2 \cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + K_4 \cdot t^3 \cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + K_5.$$

Первая производная переходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{40}^{(1)}(t) = \left(-4 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2\right) \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} + \left(-4 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3\right) \cdot t \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-4 \cdot \frac{K_3}{T} + 3K_4\right) \cdot t^2 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} - 4 \cdot \frac{K_4}{T} \cdot t^3 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Вторая производная переходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{40}^{(2)}(t) = \left(16 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 8 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3\right) \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} + \left(16 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 16 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4\right) \cdot t \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(16 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 24 \cdot \frac{K_4}{T}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} + 16 \cdot \frac{K_4}{T^2} \cdot t^3 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Третья производная переходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{40}^{(3)}(t) = \left(-64 \cdot \frac{K_1}{T^3} + 48 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 24 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4\right) \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-64 \cdot \frac{K_2}{T^3} + 96 \cdot \frac{K_3}{T^2} - 72 \cdot \frac{K_4}{T}\right) \cdot t \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+ \left(-64 \cdot \frac{K_3}{T^3} + 144 \cdot \frac{K_4}{T^2}\right) \cdot t^2 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}} - 64 \cdot \frac{K_4}{T^3} \cdot t^3 \cdot e^{-4 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Так как начальные и конечное значения передаточной функции четвертого порядка (с точки зрения физики) принимают значения:

$$\begin{cases} h_{40}(0) = 0; \\ h_{40}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{40}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{40}^{(3)}(0) = 0; \\ h_{40}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения передаточной функции второго порядка (с точки зрения математики) принимают значения:

$$\begin{cases} h_{40}(0) = K_1 + K_5; \\ h_{40}^{(1)}(0) = -4 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2; \\ h_{40}^{(2)}(0) = 16 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 8 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3; \\ h_{40}^{(3)}(0) = -64 \cdot \frac{K_1}{T^3} + 48 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 24 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4; \\ h_{40}(\infty) = K_5, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$$K_5 = 1;$$
$$\begin{cases} K_1 + 1 = 0; \\ -4 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2 = 0; \\ 16 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 8 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3 = 0; \\ -64 \cdot \frac{K_1}{T^3} + 48 \cdot \frac{K_2}{T^2} - 24 \cdot \frac{K_3}{T} + 6K_4 = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_1 = -1;$$

$$K_2 = -\frac{4}{T};$$
$$K_3 = -\frac{8}{T^2};$$
$$K_4 = -\frac{32}{3T^3}.$$

В результате, переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$h_{40}(t) = -e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 4\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 8\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - \frac{32}{3}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + 1;$$
$$h_{40}^{(1)}(t) = \frac{128}{3T}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}}.$$

Передаточная функция системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{41}(p) = \frac{\tau p+1}{\frac{1}{256}T^4p^4+\frac{1}{16}T^3p^3+\frac{3}{8}T^2p^2+Tp+1} = \frac{\tau p+1}{\left(\frac{1}{4}Tp+1\right)^4},$$

где $\tau$ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции четвертого порядка.

Переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{41}(t) = -e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 4\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 8\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - \frac{32}{3}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + 1 + \frac{128}{3}\cdot\frac{\tau}{T}\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{41}(t) = -e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 4\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 8\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + \frac{32}{3}\cdot\left(4\cdot\frac{\tau}{T}-1\right)\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + 1.$$

Если $\tau = \frac{1}{4}T$, то $h_{41}(t) = -e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 4\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - 8\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} + 1.$

Если $h_{41}(t_*) = 1$, то справедливы соотношения:

$$e^{-4\cdot\frac{t_*}{T}} + 4\cdot\frac{t_*}{T}\cdot e^{-4\cdot\frac{t_*}{T}} + 8\cdot\frac{t_*^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t_*}{T}} = \frac{32}{3}\cdot\left(4\cdot\frac{\tau}{T}-1\right)\cdot\frac{t_*^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t_*}{T}};$$
$$T^4 + 4T^3\cdot\ t_* + 8T^2\cdot\ t_*^2 = \frac{32}{3}\cdot(4\tau - T)\cdot\ t_*^3;$$
$$t_*^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{T^2}{4\tau - T}\cdot t_*^2 - \frac{3}{8}\cdot\frac{T^3}{4\tau - T}\cdot t_* - \frac{3}{32}\cdot\frac{T^4}{4\tau - T} = 0,$$

где $t_*$ – время, за которое переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{4}T$.

Первая производная переходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе приобретает вид:

$$h_{41}^{(1)}(t) = 128\cdot\frac{\tau}{T^2}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}} - \frac{128}{3T}\cdot\left(4\cdot\frac{\tau}{T}-1\right)\cdot\frac{t^3}{T^3}\cdot e^{-4\cdot\frac{t}{T}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}} h_{41}^{(1)} = 0$, тосправедливо уравнение:

$$128 \cdot \frac{\tau}{T^2} \cdot \frac{t^2_{\text{экстр}}}{T^2} \cdot e^{-4 \cdot \frac{t_{\text{экстр}}}{T}} - \frac{128}{3T} \cdot \left(4 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t^3_{\text{экстр}}}{T^3} \cdot e^{-4 \cdot \frac{t_{\text{экстр}}}{T}} = 0.$$

Из уравнения следует, что:

$$t_{\text{экстр}} = \frac{3T\tau}{4\tau - T},$$

где $t_{\text{экстр}}$ – время, при котором переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{4}T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице.

**Таблица** – Результаты первой серии численного эксперимента

| $\frac{t}{T}$ | $h_{41}$ | | |
|---|---|---|---|
| | τ = 0 | $\tau = \frac{1}{4}T$ | τ = T |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,25 | 0,018988156 | 0,080301397 | 0,264241117 |
| 0,5 | 0,142876539 | 0,323323583 | 0,864664716 |
| 0,75 | 0,352768111 | 0,576809918 | 1,248935342 |
| 1 | 0,566529879 | 0,761896694 | 1,347997139 |
| 1,25 | 0,734974084 | 0,87534798 | 1,296469668 |
| 1,5 | 0,848796117 | 0,938031195 | 1,205736431 |
| 1,75 | 0,918234583 | 0,970363836 | 1,126751593 |
| 2 | 0,957619888 | 0,986246032 | 1,072124465 |
| 2,25 | 0,978773513 | 0,993767804 | 1,038750678 |
| 2,5 | 0,989663949 | 0,997230604 | 1,019930569 |
| 2,75 | 0,995084132 | 0,998789126 | 1,009904109 |
| 3 | 0,997708208 | 0,999477741 | 1,004786341 |
| 3,25 | 0,9989497 | 0,999777357 | 1,002260329 |
| 3,5 | 0,999534066 | 0,999906037 | 1,001046895 |
| 3,75 | 0,999788621 | 0,999960691 | 1,000476902 |
| 4 | 0,999906858 | 0,999983682 | 1,000214154 |
| 4,25 | 0,999959373 | 0,999993272 | 1,00009497 |
| 4,5 | 0,999982439 | 0,999997243 | 1,000041654 |
| 4,75 | 0,999992471 | 0,999998876 | 1,000018091 |
| 5 | 0,999996796 | 0,999999544 | 1,000007789 |

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ.

Проведена вторая серия численного эксперимента.

Если $\tau = \frac{1}{4}T$, то $t_* = \infty$; $t_{\text{экстр}} = \infty$; $h_{\text{макс}} = 1$.

Если $\tau = 0{,}3T$, то $t_* = 4{,}22056779T$; $t_{\text{экстр}} = 4{,}5T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}000000204$.

Если $\tau = 0{,}4T$, то $t_* = 1{,}677968913T$; $t_{\text{экстр}} = 2T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}003421719$.

Если $\tau = 0{,}5T$, то $t_* = 1{,}14785143T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}5T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}027266274$.

Если $\tau = 0{,}6T$, то $t_* = 0{,}910618194T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}285714286T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}072261234$.

Если $\tau = 0{,}7T$, то $t_* = 0{,}773218496T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}166666667T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}139381694$.

Если $\tau = 0{,}8T$, то $t_* = 0{,}68228153T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}0909090091T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}19838779$.

Если $\tau = 0{,}9T$, то $t_* = 0{,}616964316T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}0384615538T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}271315082$.

Если $\tau = T$, то $t_* = 0{,}567382711T$; $t_{\text{экстр}} = T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}347997139$.

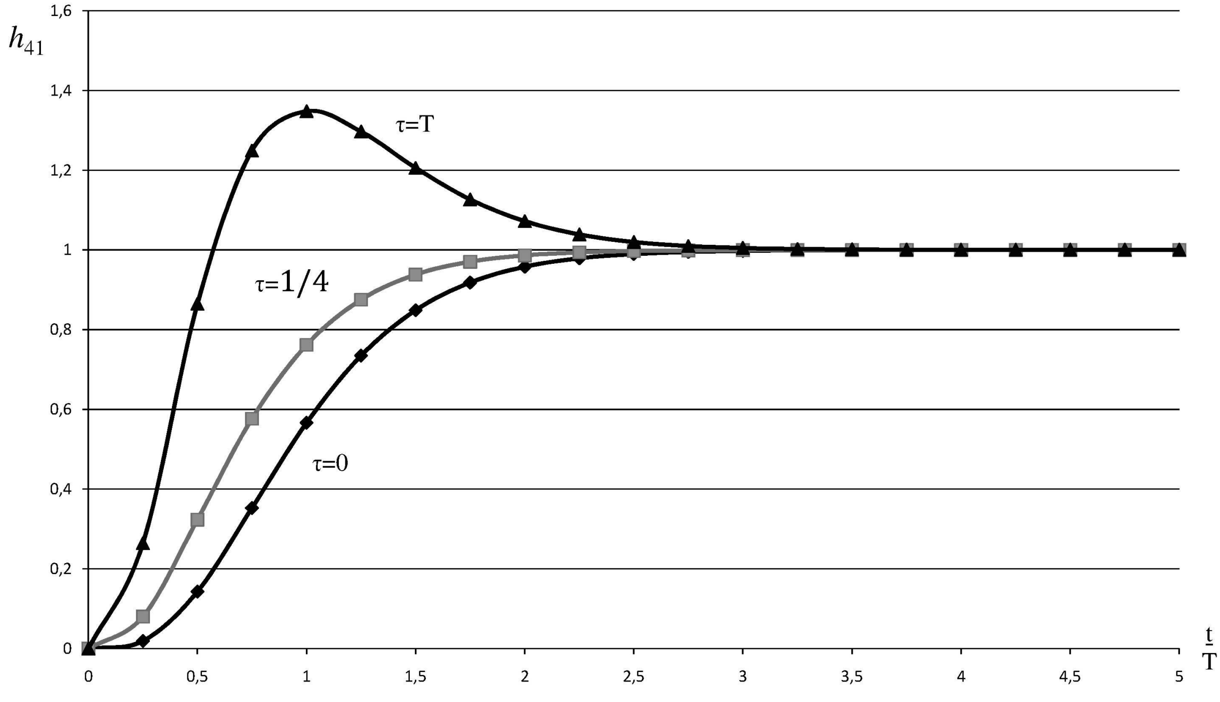


**Рисунок 1** – Зависимость $h_{41}$ от $\frac{t}{T}$ при различных τ

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости$\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

## Вывод

Получены переходные характеристики систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени.

Произведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ.

Произведен второй численный эксперимент, на основании которого получены зависимости времени, при котором переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения,времени, за которое переходная характеристика системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения от постоянной времени полинома числителя передаточной функциичетвертого порядкаимаксимального значенияпереходной характеристики системы четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени от постоянной времени полинома числителя передаточной функции четвертого порядкав относительных единицах.

Доказано, что при условии $\tau > \frac{1}{4}T$ переходные характеристики систем четвертого порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование.

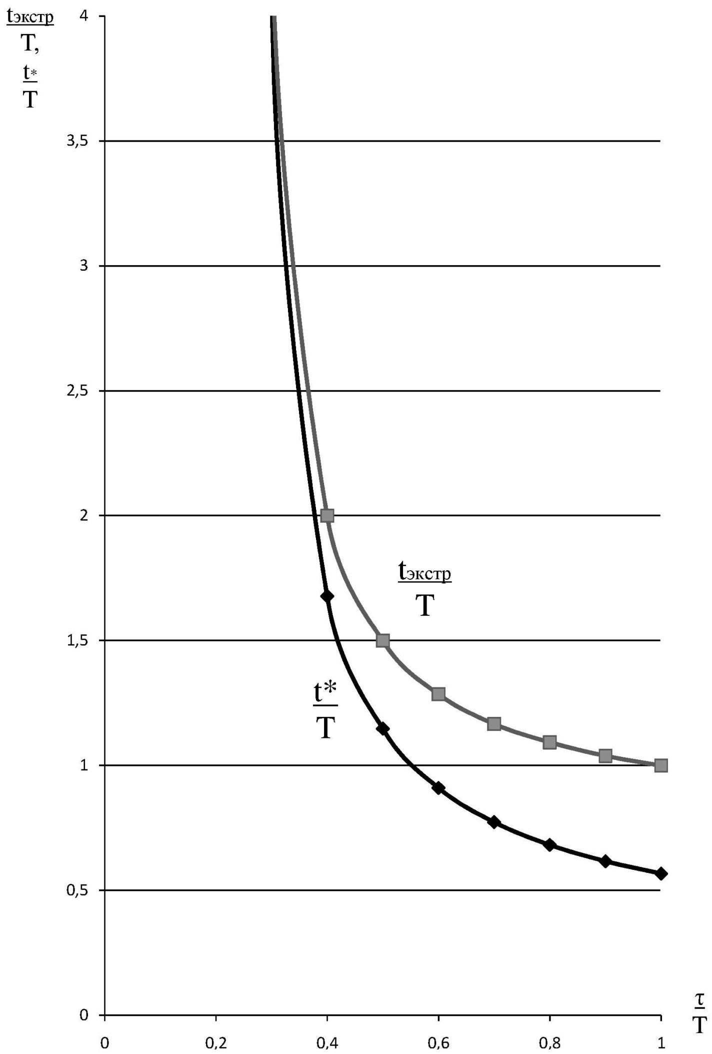


**Рисунок 2** – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$от $\frac{\tau}{T}$

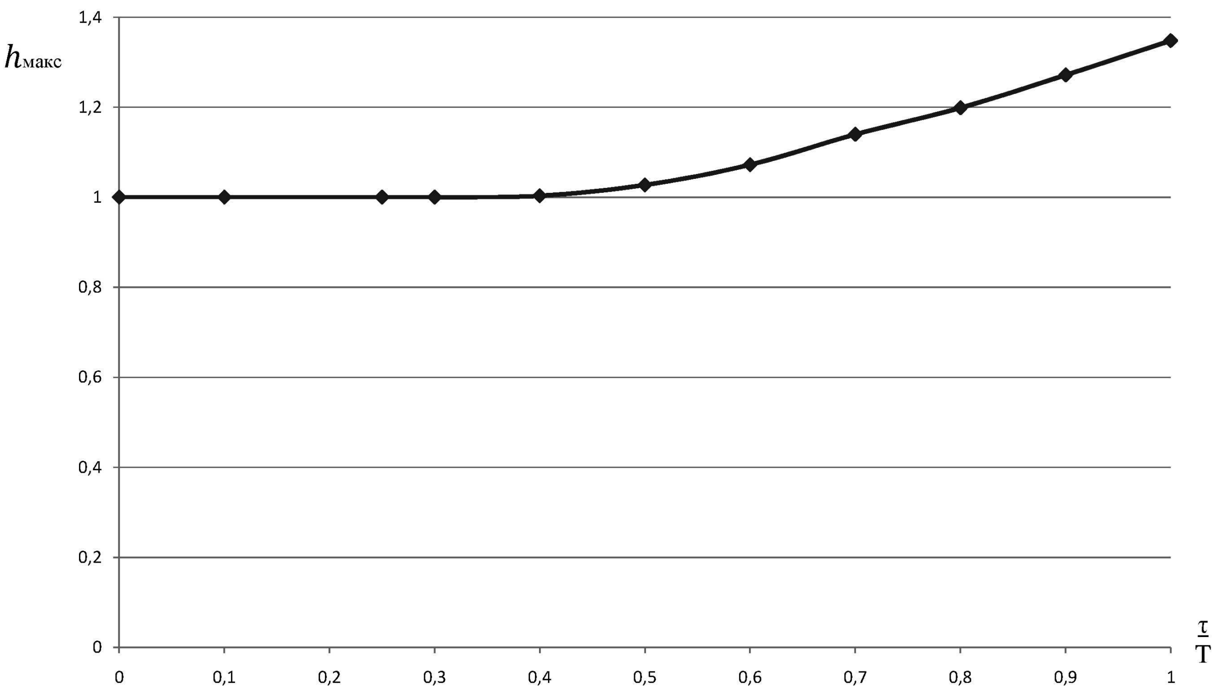


**Рисунок 3** – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$