УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

–––––––

THE ANALYSIS OF TRANSITIONAL FEATURES OF THE SYSTEM OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович
кандидат технических наук, доцент,
профессор кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлин Алексей Георгиевич
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Серкин Александр Дмитриевич
студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Dobrobaba Yury Petrovich
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Professor of department
of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

Murlin Aleksey Georgievich
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Associate professor of department
of information systems and programming,
Kuban state technological university

Serkin Aleksandr Dmitrievich
Student,
Kuban state technological university

Аннотация. Определены переходные характеристики систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени.

Подтверждено, что при условии $\tau > \frac{1}{3}T$ переходные характеристики систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы третьего порядка, корни характеристического уравнения.

Annotation. Transitional characteristics of systems of the third order with multiple roots of the characteristic equation with a polynom of zero degree and with a polynom of the first degree are defined.

It is confirmed that under a condition $\tau > \frac{1}{3}T$ transitional characteristics of systems of the third order with multiple roots of the characteristic equation with a polynom of the first degree have reregulation.

Keywords: transient response, characteristic equation of the third order system, roots of the characteristic equation.

Передаточная функция системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет следующий вид:

$$W_{30}(p) = \frac{1}{\frac{1}{27}T^3p^3 + \frac{1}{3}T^2p^2 + Tp + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}Tp+1\right)^3}.$$

где T – постоянная времени полинома знаменателя передаточной функции третьего порядка.

Корни характеристического уравнения системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения: $Tp_{1;2;3} = -3$.

Переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}(t) = K_1 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + K_3 \cdot t^2 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + K_4.$$

Первая производная переходной характеристики системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}^{(1)}(t) = -3 \cdot \frac{K_1}{T} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + K_2 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 3 \cdot \frac{K_2}{T} \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + 2K_3 \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} -$$
$$-3 \cdot \frac{K_3}{T} \cdot t^2 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Вторая производная переходной характеристики системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{30}^{(2)}(t) = 9 \cdot \frac{K_1}{T^2} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 3 \cdot \frac{K_2}{T} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 3 \cdot \frac{K_2}{T} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + 9 \cdot \frac{K_2}{T^2} \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} +$$
$$+2K_3 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 6 \cdot \frac{K_3}{T} \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 6 \cdot \frac{K_3}{T} \cdot t \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + 9 \cdot \frac{K_3}{T^2} \cdot t^2 \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Начальные и конечное значения передаточной функции третьего порядка (с точки зрения физики) равны:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = 0; \\ h_{30}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{30}^{(2)}(0) = 0; \\ h_{30}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечное значения передаточной функции третьего порядка (с точки зрения математики) равны:

$$\begin{cases} h_{30}(0) = K_1 + K_4; \\ h_{30}^{(1)}(0) = -3 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2; \\ h_{30}^{(2)}(0) = 9 \cdot \frac{K_1}{T^2} - 6 \cdot \frac{K_2}{T} + 2K_3; \\ h_{30}(\infty) = K_4. \end{cases}$$

Коэффициенты переходной характеристики системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$K_4 = 1;$$
$$K_1 = -1;$$
$$K_2 = -\frac{3}{T};$$
$$K_3 = -\frac{9}{2T^2}.$$

Следовательно, переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения и её первая производная станут равны:

$$h_{30}(t) = -e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - 3 \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} - \frac{9}{2} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}} + 1.$$
$$h_{30}^{(1)}(t) = \frac{27}{2T} \cdot \frac{t^2}{T^2} \cdot e^{-3 \cdot \frac{t}{T}}.$$

Передаточная функция системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{31}(p) = \frac{\tau p + 1}{\frac{1}{27}T^3p^3 + \frac{1}{3}T^2p^2 + Tp + 1} = \frac{\tau p + 1}{\left(\frac{1}{3}Tp + 1\right)^3},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции третьего порядка.

Переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{31}(t) = -e^{-3\cdot\frac{t}{T}} - 3\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} - \frac{9}{2}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} + 1 + \frac{27}{2}\cdot\frac{\tau}{T}\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}}.$$

Переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе после преобразования принимает вид:

$$h_{31}(t) = -e^{-3\cdot\frac{t}{T}} - 3\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} + \frac{9}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} + 1.$$

Если $\tau = \frac{1}{3}T$, то $h_{31}(t) = -e^{-3\cdot\frac{t}{T}} - 3\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} + 1.$

Если $h_{31}(t_*) = 1$,то справедливы соотношения:

$$e^{-3\cdot\frac{t_*}{T}} + 3\cdot\frac{t_*}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t_*}{T}} = \frac{9}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t_*^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t_*}{T}};$$

$$T^3 + 3T^2\cdot\ t_* = \frac{9}{2}\cdot(3\tau - T)\cdot\ t_*^2;$$

$$t_*^2 - \frac{2T^2}{3\cdot(3\tau - T)}\cdot\ t_* - \frac{2T^3}{9\cdot(3\tau - T)} = 0.$$

$$t_* = \frac{T^2}{3\cdot(3\tau - T)} \pm \sqrt{\frac{T^4}{9\cdot(3\tau - T)^2} + \frac{2T^3}{9\cdot(3\tau - T)}};$$

$$t_* = \frac{T^2}{3\cdot(3\tau - T)} \pm \frac{\sqrt{T^4 + 6T^3\tau - 2T^4}}{3\cdot(3\tau - T)};$$

$$t_* = \frac{T \pm \sqrt{T\cdot(6\tau - T)}}{3\cdot(3\tau - T)}\cdot T,$$

где t_* – время, за которое переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{3}T$.

Первая производная переходной характеристики системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{31}^{(1)}(t) = 27\cdot\frac{\tau}{T^2}\cdot\frac{t}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}} - \frac{27}{2T}\cdot\left(3\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t}{T}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}} h_{31}^{(1)} = 0$, тосправедливо уравнение:

$$27\cdot\frac{\tau}{T^2}\cdot\frac{t_{\text{экстр}}}{T}\cdot e^{-3\cdot\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} - \frac{27}{2T}\cdot\left(3\cdot\frac{\tau}{T} - 1\right)\cdot\frac{t_{\text{экстр}}^2}{T^2}\cdot e^{-3\cdot\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} = 0.$$

Из уравнения следует, что:

$$t_{\text{экстр}} = \frac{2T\tau}{3\tau - T},$$

где $t_{\text{экстр}}$ – время, при котором переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{3}T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице.

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ.

Таблица – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{31}		
	$\tau = 0$	$\tau = \frac{1}{3}T$	$\tau = T$
0	0	0	0
0,25	0,040505439	0,173358532	0,439064718
0,5	0,163261899	0,442174599	0,94421746
0,75	0,390660733	0,65745252	1,191036095
1	0,576809918	0,800851726	1,248935342
1,25	0,722931556	0,888290707	1,219009008
1,5	0,826421929	0,938900519	1,163857699
1,75	0,894885647	0,96720301	1,111837736
2	0,938031195	0,982648734	1,071883813
2,25	0,964251581	0,990925682	1,044273886
2,5	0,979743284	0,995298782	1,026409779
2,75	0,988692403	0,997583358	1,015365269
3	0,993767804	0,998765902	1,008762096
3,25	0,996602514	0,999373332	1,004914969
3,5	0,998165384	0,99968333	1,002719224
3,75	0,999017542	0,99984066	1,001486897
4	0,999477741	0,999920125	1,000804892
4,25	0,999724188	0,999960093	1,000431902
4,5	0,999855192	0,999980121	1,000230321
4,75	0,999924373	0,999990124	1,000121626
5	0,999960691	0,999995105	1,000063934

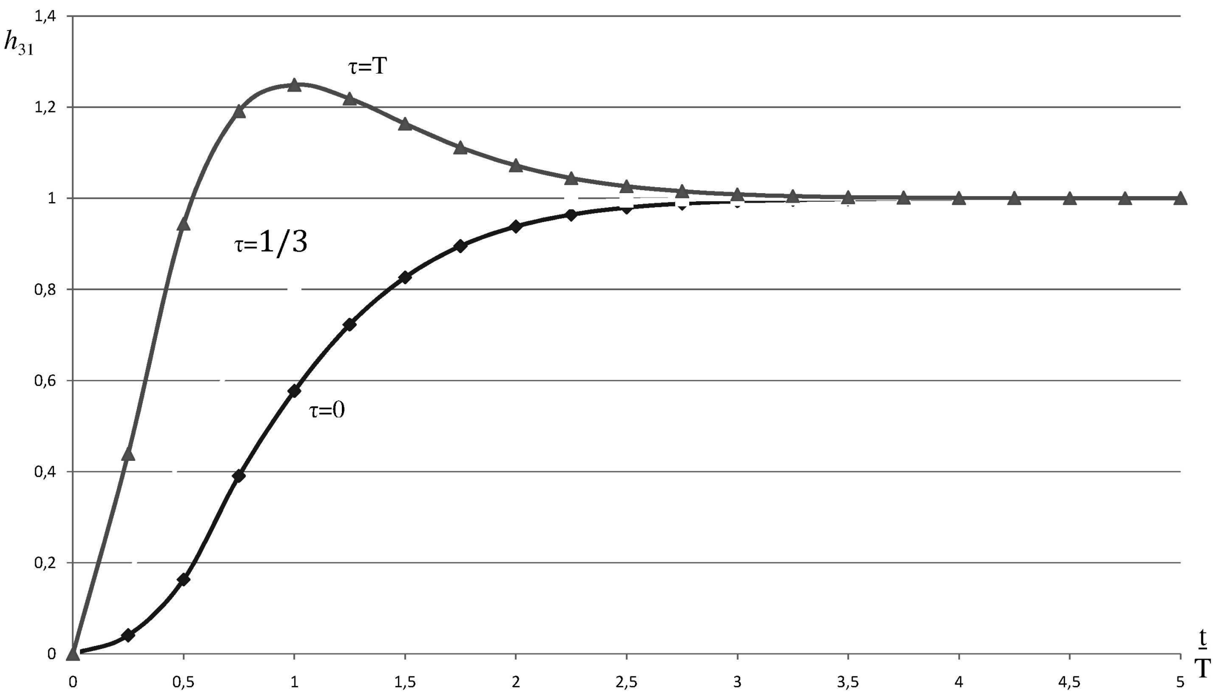

Рисунок 1 – Зависимость h_{31} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена вторая серия численного эксперимента.

Если $\tau = \frac{1}{3}T$, то $t_* = \infty$; $t_{\text{экстр}} = \infty$; $h_{\text{макс}} = 1$.

Если $\tau = 0{,}4T$, то $t_* = 3{,}638693261T$; $t_{\text{экстр}} = 4T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}000008602$.

Если $\tau = 0{,}5T$, то $t_* = 1{,}609475708T$; $t_{\text{экстр}} = 2T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}004957504$.

Если $\tau = 0{,}6T$, то $t_* = 1{,}088521479T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}5T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}028883391$.

Если $\tau = 0{,}7T$, то $t_* = 0{,}8451073887T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}272727273T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}070296659$.

Если $\tau = 0{,}8T$, то $t_* = 0{,}726045274T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}142857143T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}123246315$.

Если $\tau = 0{,}9T$, то $t_* = 0{,}6073760187T$; $t_{\text{экстр}} = 1{,}058823529T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}183623824$.

Если $\tau = T$, то $t_* = 0{,}539344662T$; $t_{\text{экстр}} = T$; $h_{\text{макс}} = 1{,}248935342$.

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

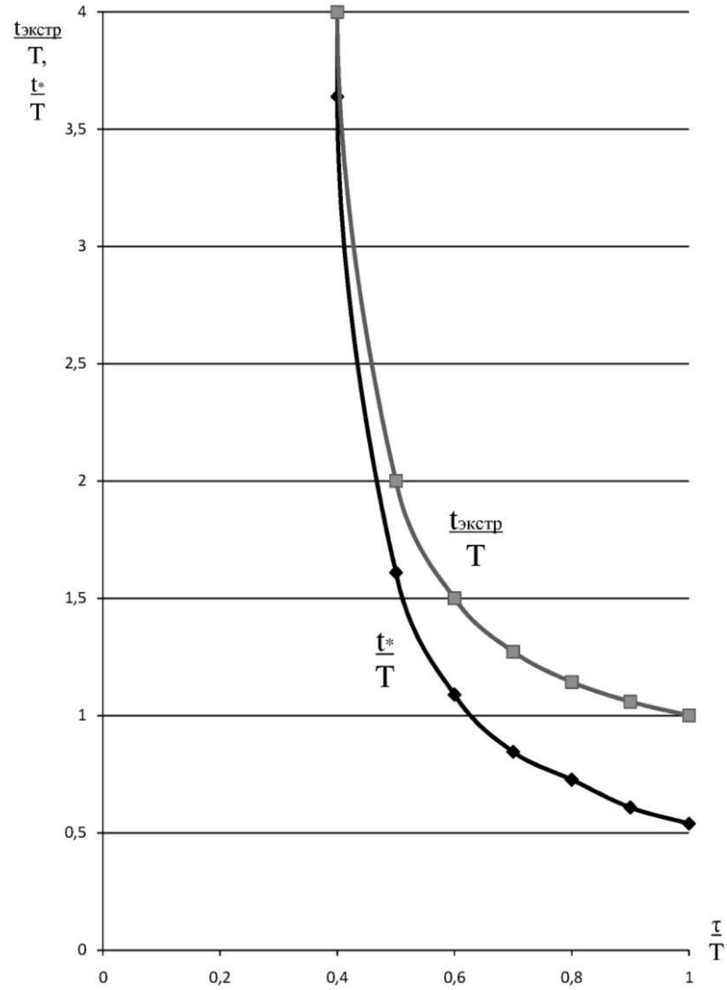

Рисунок 2 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

Вывод

Найдены переходные характеристики систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени.

Проведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ.

Проведен второй численный эксперимент, на основании которого получены зависимости времени, при котором переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения,времени, за которое переходная характеристика системы третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значенияотпостоянной времени полинома числителя передаточной функции третьего порядкаимаксимального значенияпереходной характеристики системытретьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени от постоянной времени полинома числителя передаточной функции третьего порядкав относительных единицах.

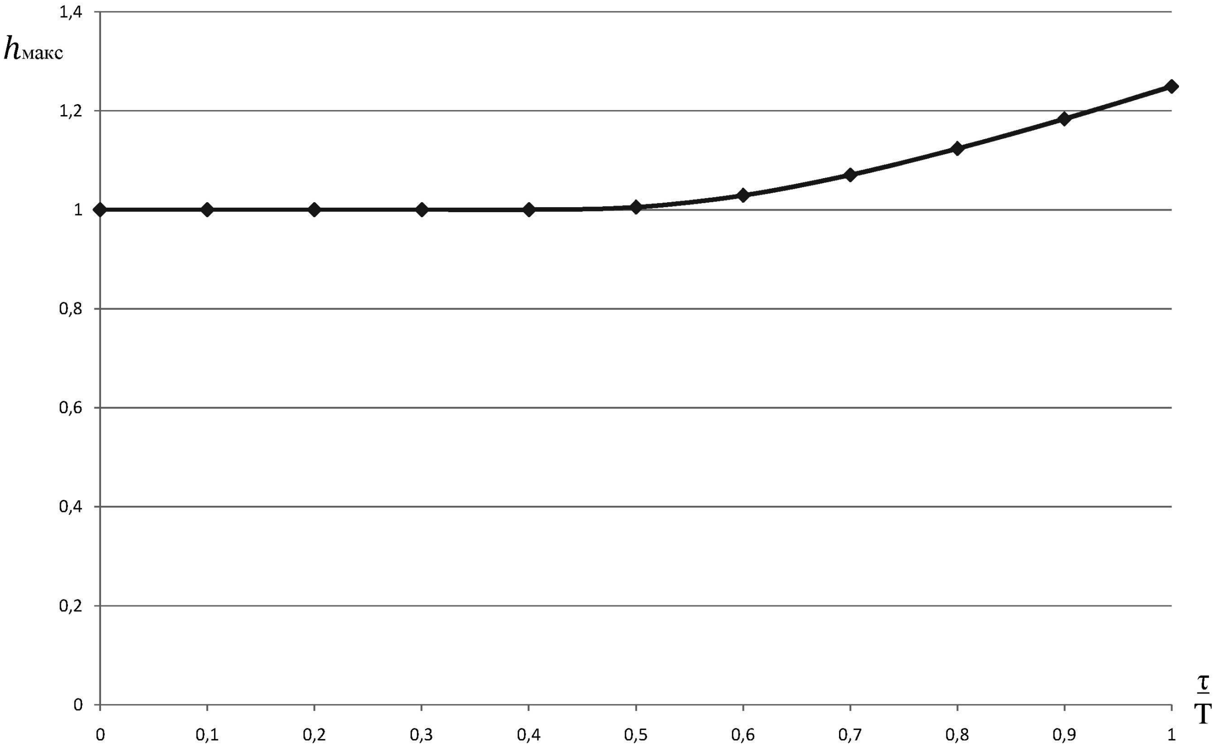

Рисунок 3 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Установлено, что при условии $\tau > \frac{1}{3}T$ переходные характеристики систем третьего порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование.