

УДК 62

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

THE ANALYSIS OF TRANSITIONAL FEATURES OF THE SYSTEM OF THE SECOND ORDER WITH MULTIPLE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

Добробаба Юрий Петрович

кандидат технических наук, доцент,
профессор кафедры электроснабжения
промышленных предприятий,
Кубанский государственный
технологический университет

Мурлин Алексей Георгиевич

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем
и программирования,
Кубанский государственный
технологический университет

Серкин Александр Дмитриевич

студент,
Кубанский государственный
технологический университет

Аннотация. Определены переходные характеристики систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом нулевой степени и с полиномом первой степени.

Доказано, что переходные характеристики систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование при условии $\tau > \frac{1}{2}T$.

Ключевые слова: переходная характеристика, характеристическое уравнение системы второго порядка, корни характеристического уравнения.

Dobrobaba Yury Petrovich

Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Professor of department
of power supply industrial enterprises,
Kuban state technological university

Murlin Aleksey Georgievich

Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Associate professor of department
of information systems and programming,
Kuban state technological university

Serkin Aleksandr Dmitrievich

Student,
Kuban state technological university

Annotation. The transient characteristics of the second-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of zero degree and with a polynomial of the first degree are determined.

It is proved that the transient characteristics of second-order systems with multiple roots of the characteristic equation with a polynomial of the first degree have overshoot under the condition $\tau > \frac{1}{2}T$.

Keywords: transient response, characteristic equation of the second order system, roots of the characteristic equation.

Передаточная функция системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$W_{20}(p) = \frac{1}{\frac{1}{4}T^2 p^2 + Tp + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}Tp + 1\right)^2},$$

где T – постоянная времени полинома знаменателя передаточной функции второго порядка.

Корни характеристического уравнения системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения:

$$Tp_{1;2} = -2.$$

Переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{20}(t) = K_1 \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + K_2 \cdot t \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + K_3.$$

Первая производная переходной характеристики системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения имеет вид:

$$h_{20}^{(1)}(t) = -2 \cdot \frac{K_1}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + K_2 \cdot e^{-2\frac{t}{T}} - 2 \cdot \frac{K_2}{T} \cdot t \cdot e^{-2\frac{t}{T}}.$$

Так как начальные и конечные значения передаточной функции второго порядка (с точки зрения физики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{20}(0) = 0; \\ h_{20}^{(1)}(0) = 0; \\ h_{20}(\infty) = 1, \end{cases}$$

а начальные и конечные значения передаточной функции второго порядка (с точки зрения математики) имеют вид:

$$\begin{cases} h_{20}(0) = K_1 + K_3; \\ h_{20}^{(1)}(0) = -2 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2; \\ h_{20}(\infty) = K_3, \end{cases}$$

то справедливы соотношения:

$$\begin{cases} K_3 = 1; \\ K_1 + 1 = 0; \\ -2 \cdot \frac{K_1}{T} + K_2 = 0. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты переходной характеристики системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения принимают значения:

$$\begin{aligned} K_1 &= -1; \\ K_2 &= -\frac{2}{T}. \end{aligned}$$

Таким образом, переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения и её первая производная соответственно равны:

$$\begin{aligned} h_{20}(t) &= -e^{-2\frac{t}{T}} - 2 \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + 1; \\ h_{20}^{(1)}(t) &= \frac{4}{T} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

Передаточная функция системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$W_{21}(p) = \frac{\tau p + 1}{\frac{1}{4}T^2 p^2 + T p + 1} = \frac{\tau p + 1}{\left(\frac{1}{2}T p + 1\right)^2},$$

где τ – постоянная времени полинома числителя передаточной функции второго порядка.

Переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе имеет вид:

$$h_{21}(t) = -e^{-2\frac{t}{T}} - 2 \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + 1 + 4 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}}.$$

После преобразования переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе принимает вид:

$$h_{21}(t) = -e^{-2\frac{t}{T}} + 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}} + 1.$$

Если $\tau = \frac{1}{2}T$, то $h_{21}(t) = -e^{-2\frac{t}{T}} + 1$.

Если $h_{21}(t_*) = 1$, то справедливы соотношения:

$$e^{-2\frac{t_*}{T}} = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t_*}{T} \cdot e^{-2\frac{t_*}{T}};$$

$$1 = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t_*}{T};$$

$$T^2 = 2 \cdot (2\tau - T) \cdot t_*;$$

$$t_* = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{2\tau - T},$$

где t_* – время, за которое переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{2}T$.

Первая производная переходной характеристики системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе получает вид:

$$h_{21}^{(1)}(t) = 4 \cdot \frac{\tau}{T^2} \cdot e^{-2\frac{t}{T}} - \frac{4}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t}{T} \cdot e^{-2\frac{t}{T}}.$$

Так как при $t = t_{\text{экстр}} h_{21}^{(1)} = 0$, то справедливо уравнение:

$$4 \cdot \frac{\tau}{T^2} \cdot e^{-2\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} - \frac{4}{T} \cdot \left(2 \cdot \frac{\tau}{T} - 1\right) \cdot \frac{t_{\text{экстр}}}{T} \cdot e^{-2\frac{t_{\text{экстр}}}{T}} = 0.$$

Из уравнения следует, что:

$$t_{\text{экстр}} = \frac{T\tau}{2\tau - T},$$

где $t_{\text{экстр}}$ – время, при котором переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения.

При этом должно выполняться условие $\tau > \frac{1}{2}T$.

Проведена первая серия численного эксперимента, результаты которой представлены в таблице.

Таблица – Результаты первой серии численного эксперимента

$\frac{t}{T}$	h_{21}		
	$\tau = 0$	$\tau = \frac{1}{2}T$	$\tau = T$
1	2	3	4
0	0	0	0
0,25	0,09020401	0,39346934	0,69673437
0,5	0,264241117	0,62120558	1
0,75	0,442174599	0,77686839	1,11156508
1	0,59399415	0,864664716	1,135335283
1,25	0,712702504	0,917915001	1,123127498
1,5	0,800851726	0,950212931	1,099574137
1,75	0,864111774	0,969802616	1,075493459
2	0,908421805	0,981684361	1,054946917
2,25	0,938900519	0,988891003	1,038881488
2,5	0,959572318	0,993262053	1,026951788

Продолжение таблицы

1	2	3	4
2,75	0,973435985	0,995913228	1,018390471
3	0,982648734	0,997521247	1,012393761
3,25	0,988724206	0,99849656	1,008268916
3,5	0,992704944	0,999088118	1,005471292
3,75	0,995298782	0,999446915	1,003595048
4	0,996980836	0,999664537	1,002348238
4,25	0,99806705	0,999796531	1,001526013
4,5	0,998765902	0,99987659	1,000987278
4,75	0,999214055	0,999925148	1,000636241
5	0,9995006	0,9999546	1,000408599

По результатам первой серии численного эксперимента на рисунке 1 представлены зависимости переходных характеристик системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ .

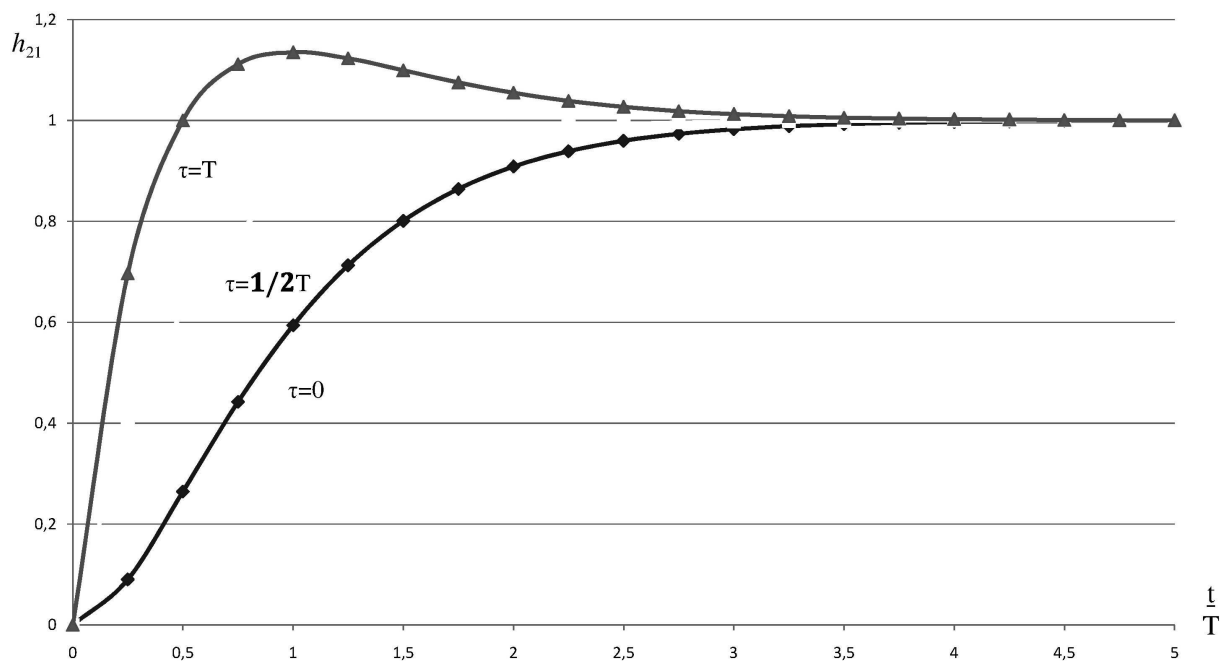


Рисунок 1 – Зависимость h_{21} от $\frac{t}{T}$ при различных τ

Проведена вторая серия численного эксперимента.

Если $\tau = 0,5T$, то $t_* = \infty$; $t_{\text{экстр}} = \infty$; $h_{\text{макс}} = 1$.

Если $\tau = 0,6T$, то $t_* = 2,5T$; $t_{\text{экстр}} = 3T$; $h_{\text{макс}} = 1,00049575$.

Если $\tau = 0,7T$, то $t_* = 1,25T$; $t_{\text{экстр}} = 1,75T$; $h_{\text{макс}} = 1,012078953$.

Если $\tau = 0,8T$, то $t_* = \frac{5}{6}T$; $t_{\text{экстр}} = \frac{4}{3}T$; $h_{\text{макс}} = 1,041690071$.

Если $\tau = 0,9T$, то $t_* = 0,625T$; $t_{\text{экстр}} = 1,125T$; $h_{\text{макс}} = 1,08431938$.

Если $\tau = T$, то $t_* = 0,5T$; $t_{\text{экстр}} = T$; $h_{\text{макс}} = 1,135335283$.

По результатам второй серии численного эксперимента на рисунках 2 и 3 представлены зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$, $\frac{t_*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$ и $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$.

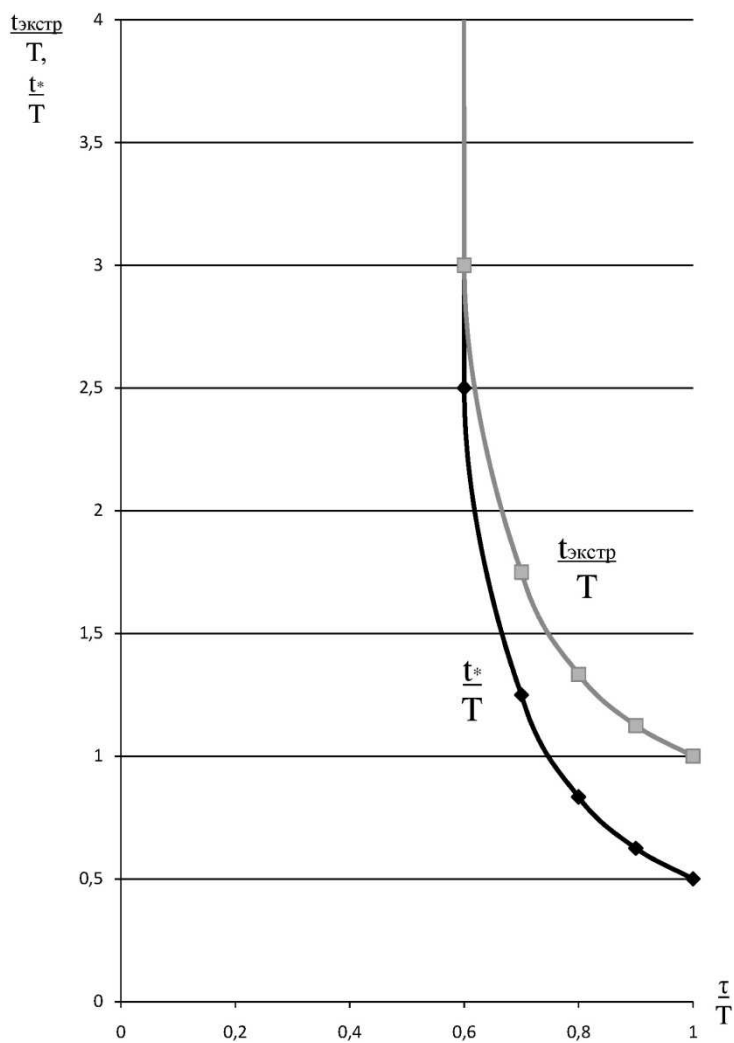


Рисунок 2 – Зависимости $\frac{t_{\text{экстр}}}{T}$ и $\frac{t^*}{T}$ от $\frac{\tau}{T}$

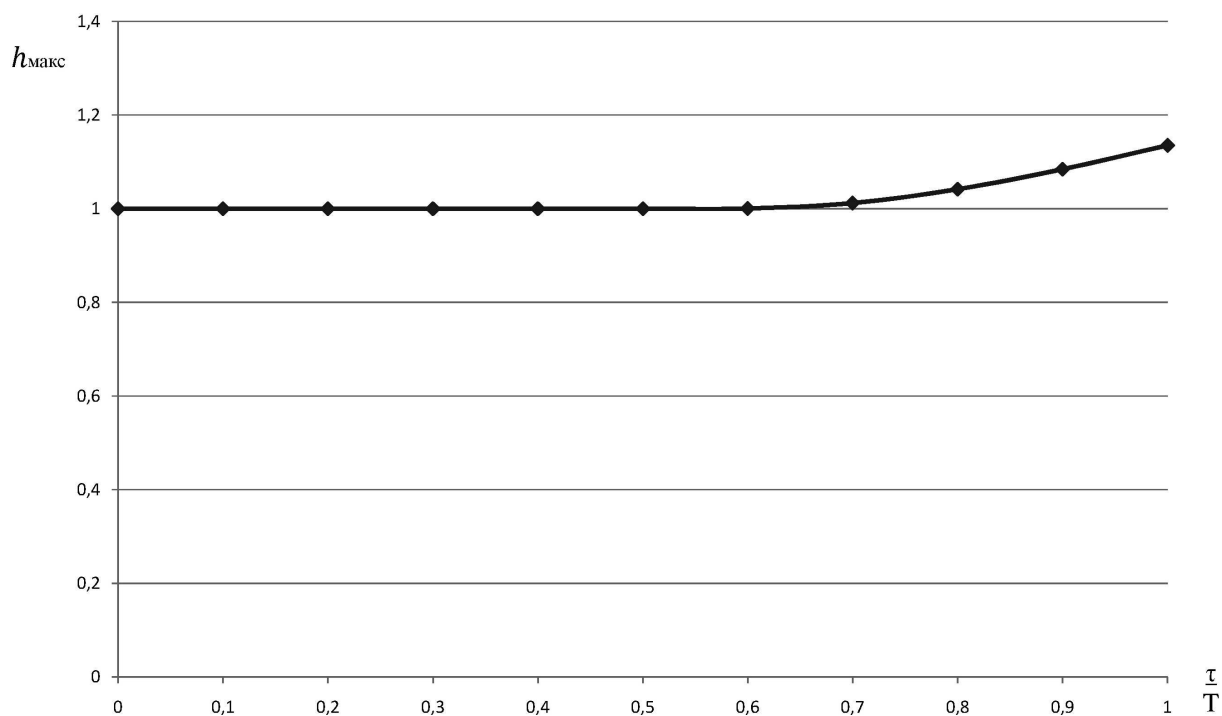


Рисунок 3 – Зависимость $h_{\text{макс}}$ от $\frac{\tau}{T}$

Вывод

Получены переходные характеристики систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения как с полиномом нулевой степени, так и с полиномом первой степени.

Проведен первый численный эксперимент, на основании которого получены зависимости переходных характеристик системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе при различных значениях τ .

Проведен второй численный эксперимент, на основании которого получены зависимости времени, при котором переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает максимального значения, времени, за которое переходная характеристика системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени в числителе достигает единичного значения от постоянной времени полинома числителя передаточной функции второго порядка и максимального значения переходной характеристики системы второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени от постоянной времени полинома числителя передаточной функции второго порядка в относительных единицах.

Установлено, что при условии $\tau > \frac{1}{2}T$ переходные характеристики систем второго порядка с кратными корнями характеристического уравнения с полиномом первой степени имеют перерегулирование.