УДК 550.8

О ВЛИЯНИИ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НА ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИХ ОДНООСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

–––––––

ON THE INFLUENCE OF THE VALUES OF POISSON'S RATIO ON THE VOLUME CHANGE OF RODS DURING THEIR UNIAXIAL DEFORMATION

Пережогин Леонид Анатольевич
кандидат технических наук, доцент,
профессор 105 кафедры механики,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков

Терехов Владимир Валерьевич
кандидат технических наук, доцент,
заведующий 105 кафедры механики,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков

Выскубов Евгений Владимирович
кандидат технических наук,
доцент 105 кафедры механики,
Краснодарское высшее военное
авиационное училище летчиков

Perezhogin Leonid Anatolyevich
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
Professor of the 105th
department of mechanics,
Krasnodar highest military
aviation school of pilots

Terekhov Vladimir Valeryevich
Candidate of technical sciences,
Associate professor,
manager of the 105th
department of mechanics,
Krasnodar highest military
aviation school of pilots

Vyskubov Evgeny Vladimirovich
Candidate of technical sciences,
Associate professor of the 105th
department of mechanics,
Krasnodar highest military
aviation school of pilots

Аннотация. В последнее время появилось много работ, посвященных теоретическим и прикладным исследованиям по проблеме создания материалов с аномальными величинами коэффициента Пуассона и методам его измерения. Однако ни в одной из подобных работ не приводится данных о том, как связано изменение объема тела при его деформации со значением коэффициента Пуассона материала этого тела. Этот вопрос часто возникает при изучении основ сопротивления материалов и поэтому важно дать ему простую и доступную для понимания интерпретацию.
Задачей настоящей работы является анализ влияния величины коэффициента Пуассона на изменение объема стержней при их одноосной деформации, который основан на геометрической интерпретации процесса растяжения-сжатия.

Ключевые слова: Прикладные исследования, коэффициента Пуассона, методы измерения, деформация, сопротивление материалов, растяжение-сжатие.

Annotation. Recently, a lot of works devoted to theoretical and applied research on the development of materials with anomalous values of Poisson's ratio and methods of its measurement. However, in none of these works is not provided data about how changes in the amount of deformation of bodies of different materials depending on their inherent values of Poisson's ratio. This question often arises in the study of the foundations of strength of materials, and therefore it is important to give it a simple and understandable interpretation.
The purpose of this paper is to analyze the impact of the magnitude of Poisson's ratio on the volume bars at their uniaxial deformation, which is based on a geometric interpretation of the stress-strain.

Keywords: Applied research, Poisson's ratio, measurement, deformation, strength of materials, tensile-compression.

Классическая теория упругости основывается на идеально-упругой модели деформируемого твёрдого тела и в ней принимается, что:

– перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами;
– деформации тела (линейные и угловые) малы по сравнению с единицей.

Закон Гука устанавливает линейную зависимость между упругой деформацией твёрдого тела и напряжением, которое возникает в нем от приложенной внешней нагрузки.

В записи для деформации растяжения-сжатия закон Гука устанавливает, что нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению, то есть:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E,$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при растяжении, или модулем Юнга.

При сдвиге касательное напряжение пропорционально угловой деформации:

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

где G – модуль упругости при сдвиге (модуль упругости второго рода).

Модули упругости E и G определяются опытным путем и характеризуют меру жёсткости материала при растяжении-сжатии и сдвиге Они имеют размерность напряжения.

Из опытов по одноосному растяжению стержней установлен закон, связывающий относительные удлинения (укорочения) в продольном и поперечном направлениях: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$.

Коэффициент пропорциональности v называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона. Он представляет собой величину отношения относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению и является одной из фундаментальных констант для каждого конкретного материала.

Между тремя упругими постоянными E, G и v существует зависимость, вытекающая из закона Гука: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, поэтому одну из трех этих фундаментальных констант можно определить по приведенной формуле, если две другие были найдены опытным путем.

Относительная объёмная деформация в записи обобщенного закона Гука определяется как: $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ и может быть выражена через нормальные напряжения формулой $\theta = \dfrac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$.

В случае всестороннего (гидростатического) сжатия материала, когда напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$, относительная объёмная деформация определяется выражением $\theta = -3 \cdot (1-2\nu) \cdot \dfrac{\sigma}{E}$.

При анализе приведенных формул отмечают [1, 2], что коэффициент Пуассона ν не может быть больше 0,5, поскольку в противном случае объём тела при его всестороннем сжатии будет увеличиваться.

В последние десятилетия было установлено, что многие кубические кристаллы чистых металлов имеют аномальные значения коэффициента Пуассона [1]. Кроме того были разработаны новые материалы с аномальными значениями коэффициентов Пуассона, к числу которых относятся некоторые виды полимеров и керамики, композиционные материалы, слоистые структуры и другие специально синтезируемые искусственные материалы [1, 3, 4]. Общее название таких материалов – ауксетики (auxetics).

Для естественных изотропных материалов значения коэффициентов Пуассона находятся в пределах $0 \le v \le 0{,}5$. Для большинства металлов и сплавов диапазон его изменения составляет 0,25–0,35.

При объяснении физического смысла коэффициент Пуассона принято считать [1, 2, 3], что у абсолютно хрупкого материала $v = 0$, а у абсолютно несжимаемого – $v = 0{,}5$. При таком толковании физического смысла коэффициента Пуассона получается, что в процессе деформации тел со значениями $v = 0$ и $v = 0{,}5$ их объем не может изменяться, поскольку абсолютно хрупкое тело при сколь угодно малой деформации разрушится, не изменив своего начального объема, а абсолютно несжимаемое не может изменить свой начальный объем по определению. Вопрос о том, как меняется объем при деформации тел с промежуточными ($0 < v < 0{,}5$) и с аномальными значениями коэффициента Пуассона обычно опускается, хотя при изучении курса сопротивления материалов такой вопрос часто возникает.

Проанализировать изменение объема стержня при одноосной деформации можно на простом примере, используя иллюстрацию, приводимую для пояснения понятия о коэффициенте Пуассона.

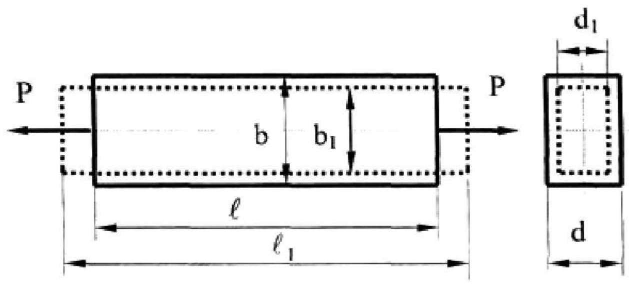

Рисунок 1

Рассмотрим одноосную деформацию цилиндрического стержня (см. рис. 1).

Объем стержня до деформации выразим в размерах с индексом «0», после деформации – без индекса. Исходный (до деформации) объем равен,

$$V_0 = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot l_0 . \qquad (1)$$

Поскольку коэффициент Пуассона v равен отношению относительной продольной деформации $\varepsilon = (l_0 - l)/l_0$ к относительной поперечной деформации $\varepsilon' = (d_0 - d)/d_0 = \Delta d/d_0$, то в принятых обозначениях для коэффициента Пуассона получим выражение:

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta d}{d_0}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right) = \frac{\Delta d}{\Delta l} \cdot \frac{l_0}{d_0} . \qquad (2)$$

При растяжении $\Delta 1 > 0$ и $\Delta d < 0$, а при сжатии $\Delta 1 < 0$ и $\Delta d > 0$, и если от начального размера вычитать конечный, знак v всегда будет отрицательным.

Таким образом, приращения Δl и Δd связаны выражениями

$$\Delta l = -\Delta d \cdot \frac{1}{|\nu|} \cdot \frac{l_0}{d_0} \text{ или } \Delta d = -\Delta l \cdot |\nu| \cdot \frac{d_0}{l_0} . \qquad (3)$$

Формула для вычисления объема стержня в растянутом состоянии имеет вид

$$V_{раст} = \frac{\pi}{4} \cdot (l_0 + \Delta l) \cdot \left[d_0 - \Delta l \cdot |\nu| \cdot \frac{d_0}{l_0} \right]^2 . \qquad (4)$$

Если принять в качестве материала стержня каучук, для которого удвоение длины от начального значения, равного l_0, до конечного значения $2 \cdot l_0$ является приемлемым, т.е.принимая $\Delta l = l_0$, то, подставив в формулу для $V_{раст}$. принятые значения $\Delta l = l_0$ и $v = 0{,}5$, получим:

$$V_{раст} = \frac{\pi}{4} \cdot (l_0 + l_0) \cdot \left[d_0 - l_0 \cdot |0{,}5| \cdot \frac{d_0}{l_0} \right]^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2l_0 \cdot \left[\frac{d_0}{2} \right]^2 = \left(\frac{\pi}{4} \cdot l_0 \cdot d_0^2\right) \cdot \frac{1}{2} , \qquad (5)$$

т.е. при удвоении длины стержня (относительное удлинение $\varepsilon = l_0/l_0 = 1$) его объем уменьшится вдвое ($V_0/V_{раст} = 2$), поэтому материал со значением $v = 0{,}5$ нельзя считать несжимаемым.

Для случая сжатия, получим:

$$V_{сж} = \frac{\pi}{4} \cdot (l_0 - l_0/2) \cdot \left[d_0 + (l_0/2) \cdot |0{,}5| \cdot \frac{d_0}{l_0} \right]^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{l_0}{2} \cdot d_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot l_0 \cdot d_0^2 \cdot \frac{25}{32} ,$$

т.е. при сжатии каучукового стержня и уменьшении его начальной длины вдвое (относительное удлинение $\varepsilon = -0{,}5 \cdot l_0/l_0 = -0{,}5$), его объем уменьшится в 0,781 от начального значения ($V_0/V_{сж} = 1{,}28$).

Полученный результат показывает, что при одноосной деформации тел их объем может изменяться в достаточно больших пределах. Особо отметим, что приведенный расчет справедлив именно для каучука - материала с $v = 0{,}5$. В данном случае основные допущения классической теории упругости о малости линейных перемещений и деформаций соблюдаются, поскольку деформация является обратимой благодаря уникальным свойствам материала, у которого $\sigma_{пц} > E$. Это позволяет считать приведенный расчет корректным. Вместе с тем, интересно проследить, какими будут результаты расчетов для материалов с другими значениями коэффициентов Пуассона. Рассмотрим достаточно большой интервал относительных деформаций $-0{,}5 \le \varepsilon \le 1{,}0$. При этом будем помнить, что для большинства естественных материалов величина модуля продольной упругости E, как правило, на 2–3 порядка превышает значение напряжения предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, т.е. интервала, в котором действителен закон Гука.

Отношение выражения (1) к выражению (4) даст формулу для вычисления относительного объема стержня:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{l_0}{(l_0 + \Delta l) \cdot \left[1 - \Delta l \cdot |\nu| \cdot \dfrac{1}{l_0}\right]^2} .$$

Разделив числитель и знаменатель этой формулы на l_0 получим:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{1}{(1+\varepsilon) \cdot [1 - \varepsilon \cdot \nu]^2} . \qquad (6)$$

При расчетах положительное значение относительного удлинения ε соответствует процессу растяжения, а отрицательное – процессу сжатия.

Результаты расчетов, проведенных по зависимости (6) при значениях коэффициента Пуассона $0 \le \nu \le 0{,}5$ и значениях относительного удлинения $-0{,}5 \le \varepsilon \le 1$ приведены на рисунке 2.

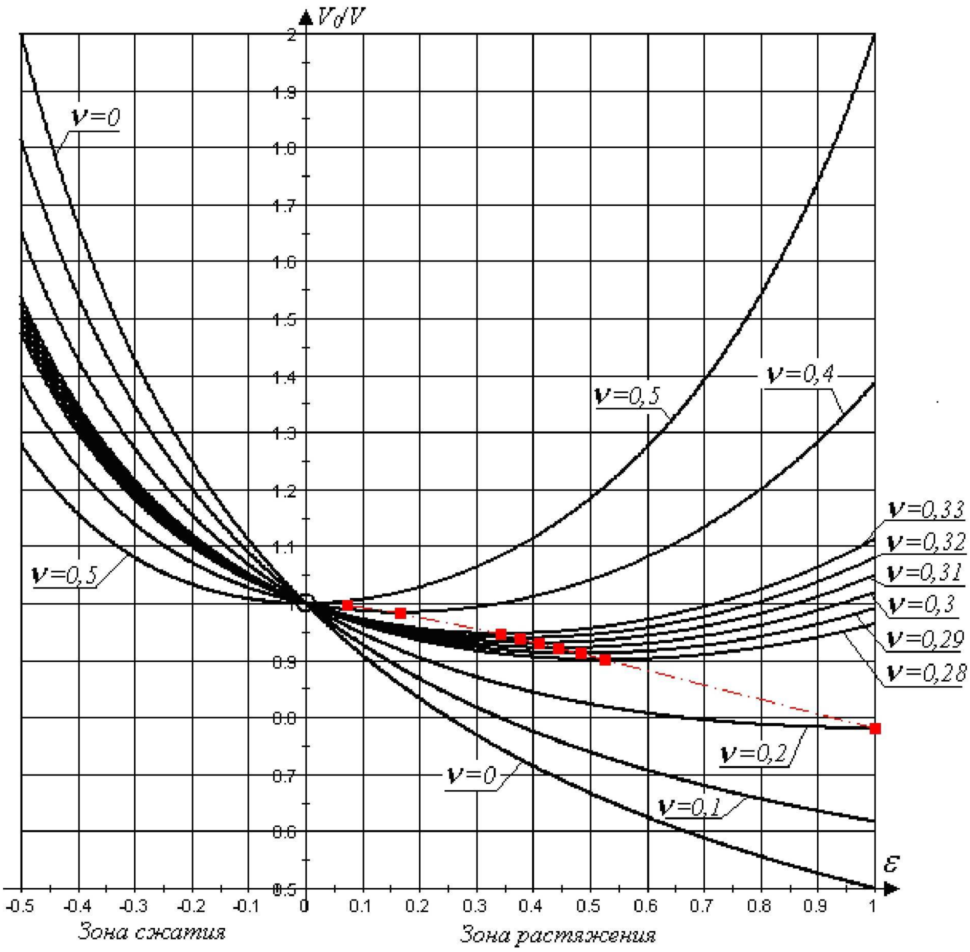

Рисунок 2 – Результаты расчетов относительного объема V_0 / V для величин $0 \le \nu \le 0{,}5$ в диапазоне относительных деформаций $-0{,}5 \le \varepsilon \le 1$

Для кривой, соответствующей значению ν = 0,5, на границах диапазона изменений относительного удлинения ε = –0,5 и ε = 1 мы видим результаты, полученные при расчете в приведенном выше примере. Эта кривая является единственной из всего семейства кривых, обе ветви которой начинаются в точке ε = 0 и V_0/V = 1 (точке с нулевой деформацией) и которая имеет минимум в этой точке. Это означает, что при ν = 0,5 объем деформируемого стержня уменьшается как при растяжении, так и при сжатии. В зоне растяжения темп увеличения относительного объема, описываемого этой кривой, наибольший из всего семейства кривых в правой части графика, а в зоне сжатия (левая часть графика) темп увеличения объема меньший, чем у всех кривых семейства. Кривая, соответствующая ν = 0, не имеет физического смысла. Она при ε→∞ ассимптотически приближается к значению V_0/V = 0, но на рисунке 2 это не показано. Все промежуточные кривые семейства (как и кривая с ν = 0,5) имеют в зоне растяжения минимумы, по точкам которых проведена штрих – пунктирная линия. Группе кривых с ν = 0,28–0,33 соответствуют значения ν, характерные для большинства металлов и сплавов. Минимальное изменение относительного объема в приведенной на рисунке зоне растяжения с диапазоном 0 ≤ ε ≤ 1 имеет кривая, соответствующая ν = 0,32.

Рассмотренный диапазон изменения относительного удлинения –0,5 ≤ ε ≤ 1 у кривых, приведенных на диаграмме рисунока 2, многократно превышает диапазон ограничений деформаций, допустимый в классической теории деформации для большинства естественных материалов. Однако в этой диаграмме всегда можно выделить такую зону, в который ограничения соблюдаются и диаграмма имеет практический смысл.

Поскольку диапазон отношения модуля продольной упругости *E* к пределу пропорциональности $\sigma_{пц}$ для большинства естественных материалов находится в пределах ±(0,0005–0,02), что соответствует области малых приращений, описываемых законом Гука, то имеет смысл рассмотреть именно такой диапазон относительных удлинений.

На рисунке 3, приведен график (аналогичный графику рис. 2) для материалов с 0 ≤ ν ≤ 0,5 в диапазоне изменения относительных удлинений –0,01 ≤ ε ≤ 0,02.

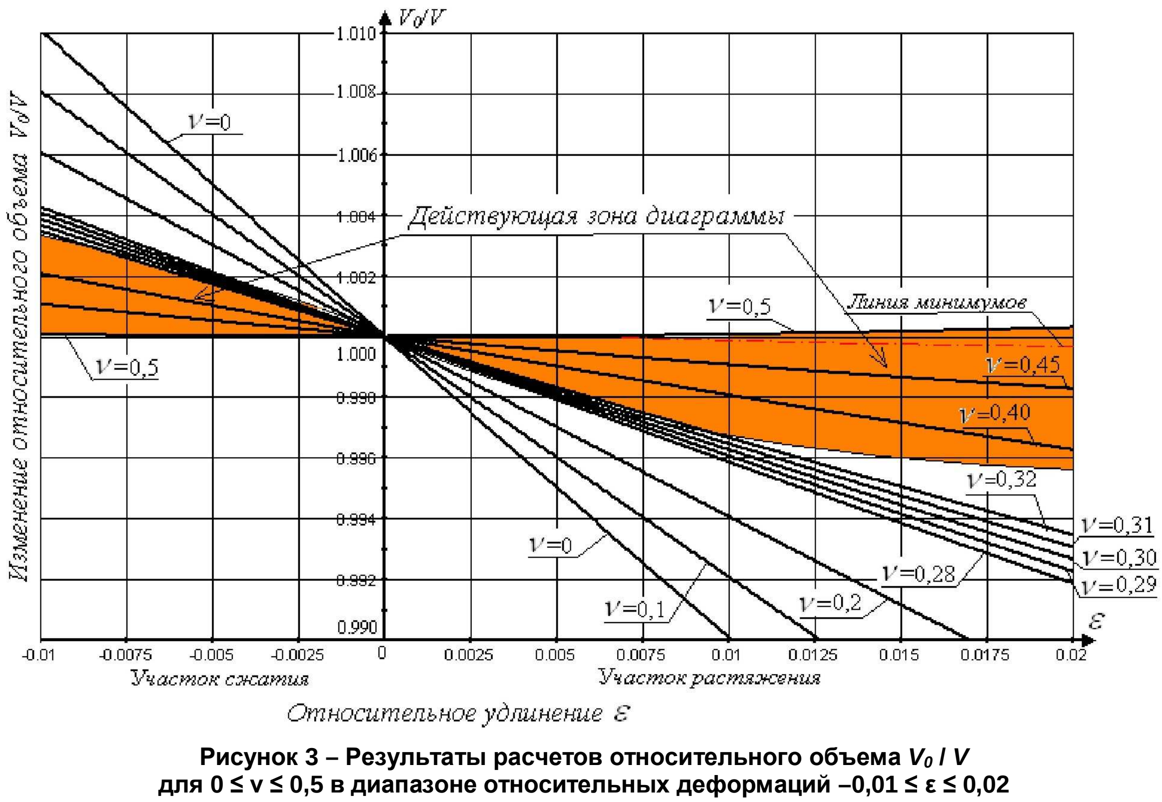

Рисунок 3 – Результаты расчетов относительного объема V_0 / V
для 0 ≤ ν ≤ 0,5 в диапазоне относительных деформаций –0,01 ≤ ε ≤ 0,02

На этом графике выделена затемненная зона (действующая зона диаграммы), в любой точке которой, определяемой парой значений ε и ν, соблюдается принцип малых перемещений и деформаций. С одной стороны затемненная зона прилегает к кривой, соответствующей $\nu = 0,5$, а с другой ограничена кривой, построенной по точкам пересечения кривых $\nu = \text{const}$ с линиями значений ε, рассчитанных по формуле,

$$\varepsilon = \frac{\sigma_T}{E},$$

где E – модуль продольной упругости материала с соответствующим значением ν;
σ_T – предел текучести данного материала.

Отметим, что вторая кривая, ограничивающая затемненную зону, показана приблизительно. Для точного построения этой кривой необходимо иметь достаточный объем достоверных экспериментальных данных.

Выводы

При одноосной деформации объем стержней, выполненных из материалов со значением коэффициента Пуассона $\nu \approx 0,5$, уменьшается как при растяжении, так и при сжатии.

У материалов со значениями $\nu < 0,5$ в диапазоне $-0,01 \le \varepsilon \le 0,02$ деформация растяжения сопровождается увеличением объема растягиваемых стержней.

При сжатии объем стержней, выполненных из естественных изотропных материалов, уменьшается при всех значениях коэффициента Пуассона и при любых значениях коэффициента относительной продольной деформации. В связи с бурным развитием технологий создания новых материалов с заданными свойствами, можно ожидать появления материалов, свойства которых существенно расширят выделенную действующую зону диаграммы.

Литература:

1. Беломестных В.Н., Соболева Э.Г. Коэффициенты Пуассона щелочно-галоидных кристаллов // Известия Томского политехнического университета. – 2015. – Т. 326. – Ч. III: Галогениды калия. – № 3.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – М. : Физматлит, 2005. – Т.I: Механика. – С. 414.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / пер. с англ. – М. : «Мир», 1975.
4. Шилько С.В., Старжинский В.Е., Петроковец Е.М. Анализ влияния коэффициента Пуассона материала на деформативность зубчатых колес / Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 41 (1014) 183.

References:

1. Belomestnykh V.N., Soboleva E.G. Poisson's coefficients of alkaline and haloid crystals // News of the Tomsk polytechnical university. – 2015. – T. 326. – P. III: potassium Halogenides. – No. 3.
2. Sivukhin D.V. General course of physics. – M. : Fizmatlit, 2005. – T. I: Mechanic's – P. 414.
3. Trusdell K. An initial course of rational mechanics of continuous environments / lanes with English – M. : «World», 1975.
4. Shilko S.V., Starzhinsky V.E., Petrokovets E.M. Analysis of influence of coefficient of Puassona of material on a deformativnost Cogwheels / Visnik NTU «HPI». – 2013. – No. 41 (1014) 183.