

УДК 531.8

**ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

**APPLICATION OF THEOREM OF KINETIC ENERGY
FOR RESEARCH OF MECHANICAL SYSTEMS
WITH MANY DEGREES OF FREEDOM**

Смелягин Анатолий Игоревич

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики,
Кубанский государственный
технологический университет
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoly Igorevich

Doctor of engineering, Professor,
Head of the department
of theoretical mechanics,
Kuban state technological university
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Известно, что теорема об изменении кинетической энергии была выведена из второго закона Ньютона для материальной точки и системы материальных точек без учета их фактической подвижности. Поэтому на практике она применялась только тел и механических систем с одной степенью свободы. Показано, что теорема об изменении кинетической энергии может эффективно применяться и для исследования, как материальных тел, так и механических систем со многими степенями свободы. Так, с помощью ранее выведенной теоремы исследована реальная механическая система с тремя степенями свободы. Это делает теорему об изменении кинетической энергии универсальной, эффективной и значительно расширяет области её применения.

Annotation. It is known that the change of kinetic energy theorem was derived from Newton's second law for a material point and system of material points without taking into account their actual mobility. Therefore, in practice it has been applied only bodies and mechanical systems with one degree of freedom. It is shown that the theorem of change of kinetic energy can be effectively used for the study of bodies and mechanical systems with many degrees of freedom. So with the previously derived theorems studied real mechanical system with three degrees of freedom. This makes the theorem of change of kinetic energy of the universal, efficient, and significantly expands the area of its application.

Ключевые слова: теорема, кинетическая энергия, степень свободы, тело, механическая система, работа, сила, момент, скорость, закон движения.

Keywords: theorem, the kinetic energy, the degree of freedom of the body, a mechanical system, work, force, speed, motion law.

Введение

Все машины состоят только из материальных тел (звеньев, деталей), которые, чтобы совершать требуемые движения, определенным образом взаимосвязаны между собой. В настоящее время существует множество разных механических систем у которых звенья (тела) имеют много степеней свободы. К таким системам относятся манипуляторы, роботы, обрабатывающие станки, грузоподъемные машины и другие аналогичные устройства. При разработке, создании и исследовании таких объектов обязательно проводится их динамический анализ. При динамическом анализе машин с несколькими степенями свободы чаще всего используют уравнения Лагранжа II рода или законы Ньютона [1–8].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [4–6] показал, что они сформулированы для не существующего в природе объекта, а именно материальной точки. Следовательно, применять законы Ньютона для анализа динамики машин, роботов, манипуляторов некорректно. Поэтому в работах [7, 8] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия и выведены теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы, а также показана эффективность их применения для исследования материальных тел и механических систем [9–19].

В [6] показано, что энергия является основным, первичным понятием, определяющим движение и взаимодействие материальных объектов, а также доказана тео-

теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.

То есть

$$T + T_0 = A, \quad (1)$$

где A – работа сил и моментов сил, действующих на тело, на исследуемом перемещении; T и T_0 – кинетическая энергия исследуемого объекта в конечном и начальном положении, соответственно.

Как следует из [6], теорема об изменении кинетической энергии всегда выводилась для материальной точки и для системы материальных точек без учета их фактической подвижности. Поэтому уравнение (1) фактически пригодно только для описания движения тел и механических систем с одной степенью свободы.

В [19] доказана теорема об изменении кинетической энергии для тел и механических систем с несколькими степенями свободы. Показано, что в общем случае для механической системы с несколькими степенями свободы теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$\begin{cases} T_{\Pi xi} - T_{\Pi 0 xi} = A_{\Pi xi}; \\ T_{\Pi yi} - T_{\Pi 0 yi} = A_{\Pi yi}; \\ T_{\Pi zi} - T_{\Pi 0 zi} = A_{\Pi zi}; \\ T_{B xi} - T_{B 0 xi} = A_{B xi}; \\ T_{B yi} - T_{B 0 yi} = A_{B yi}; \\ T_{B zi} - T_{B 0 zi} = A_{B zi}; \end{cases} \quad (2)$$

где $T_{\Pi x}, T_{\Pi 0 x}, T_{\Pi y}, T_{\Pi 0 y}, T_{\Pi z}, T_{\Pi 0 z}, T_{B x}, T_{B 0 x}, T_{B y}, T_{B 0 y}, T_{B z}$ – кинетические энергии тел при их движении вдоль и вокруг соответствующих осей, соответственно; $A_{\Pi xi}, A_{\Pi yi}, A_{\Pi zi}, A_{B xi}, A_{B yi}, A_{B zi}$ – работы сил и моментов сил, действующих на тела, на исследуемых перемещениях; i – число степеней свободы механической системы.

Отметим, что число уравнений, входящих в систему (2), должно равняться числу обобщенных координат.

Из (2) следует, что если механическая система имеет несколько степеней свободы, то изменения кинетической энергии тел, входящих в эту систему, вдоль и вокруг осей равно соответствующим работам.

Рассмотрим практическое применение выведенной теоремы при исследовании механических систем с несколькими степенями свободы.

Механическая система с тремя степенями свободы

Исследуем, например, движения тел механической системы приведенной на рисунке 1.

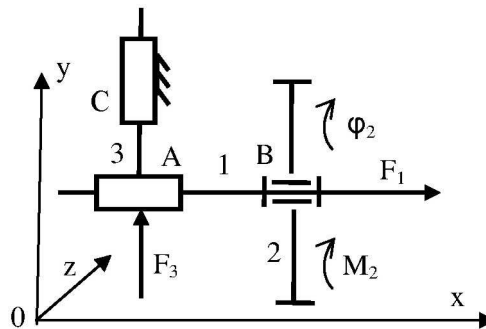


Рисунок 1 – Расчетная схема

Исследуемая механическая система состоит из трёх подвижных звеньев (тел) 1, 2, 3 которые взаимосвязаны между собой с помощью кинематических пар A , B , C . Пусть звенья имеют, соответственно, массы m_1 , m_2 и m_3 .

Звено 1 представляет собой стержень, который перемещается под действием силы F_1 вдоль кинематической пары A .

Звено 2 (колесо) образует со звеном 1 кинематическую вращательную пару B и выполнено таким образом, что оно под действием приложенного к нему момента M_2 вращается вокруг оси x . При исследовании движения системы примем, что колесо 2 представляет собой кольцо.

Звено 3 представляет собой стержень, который перемещается под действием силы F_3 вдоль кинематической пары C .

Для широты исследования примем, что на звенья 1, 2, 3 действуют:

- сила $F_1 = \text{const}$;
- сила $F_3 = bt^2$;
- момент $M_2 = M - k\omega^2$,

где b и k – постоянные коэффициенты; M – движущий момент; $k\omega^2$ – момент сопротивления.

Движение механической системы исследуем при следующих начальных условиях, что при $t = 0$:

- линейные V и угловая ω скорости, соответственно, равны $V_{1x} = 0$, $V_{2x} = 0$ и $\omega_3 = 0$;

- перемещения, x_1 , y_3 и φ_2 , равны, соответственно, $x_1 = 0$, $y_3 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

Из расчетной схемы следует, что звенья 1 и 2 совершают поступательные движения вдоль осей x и y , а колесо 3 вращается вокруг оси x . Движения всех звеньев системы являются независимыми. Следовательно, исследуемая механическая система имеет три степени свободы [1–3, 16].

Для определения законов движения звеньев механической системы (рис. 1) уравнение (2) примет вид

$$T_{\Pi x} - T_{\Pi 0x} = A_{\Pi x}, \quad (3)$$

$$T_{\Pi y} - T_{\Pi 0y} = A_{\Pi y}, \quad (4)$$

$$T_{Bx} - T_{B0x} = A_{Bx}, \quad (5)$$

где $T_{\Pi x}, T_{\Pi 0x}, T_{\Pi y}, T_{\Pi 0y}, T_{Bx}, T_{B0x}$ – соответственно, кинетические энергии тел 1, 2, 3 при их движении вдоль и вокруг соответствующих осей; $A_{\Pi x}, A_{\Pi y}, A_{Bx}$ – соответственно, работы сил и моментов сил, действующих на тела, на исследуемом перемещении.

Анализ уравнений (3–5) показывает, что они представляют собой теоремы об изменении кинетической энергии, тел (звеньев) 1, 2 и 3 при их независимых движениях вдоль и вокруг осей x и y .

При принятых начальных условиях, что при $t = 0$ скорости и положения звеньев равны нулю, кинетическая энергия этих тел в начальный момент времени будет равна нулю, то есть

$$T_{\Pi 0x} = 0, \quad (6)$$

$$T_{\Pi 0y} = 0, \quad (7)$$

$$T_{B0x} = 0. \quad (8)$$

С учетом (6–8) уравнения (3–5) примут вид:

$$T_{\Pi x} = A_{\Pi x}, \quad (9)$$

$$T_{\Pi y} = A_{\Pi y}, \quad (10)$$

$$T_{Bx} = A_{Bx}. \quad (11)$$

Последовательно раскроем уравнения (9–11).

Кинетическая энергия тела 1 в исследуемый момент времени при его движении вдоль оси x определится

$$T_{\text{Пх1}} = \frac{m_{11}V_x^2}{2}, \quad (12)$$

где $m_{11} = m_1 + m_2$ – масса первого и второго тела исследуемой механической системы.

Работа силы F , действующей на тело 1 при его движении вдоль оси x , будет

$$A_{\text{Пх}} = F_1 x. \quad (13)$$

Подставим (12) и (13) в (9)

$$\frac{m_{11}V_x^2}{2} = F_1 x. \quad (14)$$

Из (14) найдем скорость звена 1 при его движении вдоль оси x

$$V_x = \sqrt{\frac{2F_1}{m_{11}} x}. \quad (15)$$

Для определения закона движения тела 1 вдоль оси x представим (15) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2F_1}{m_{11}} x}. \quad (16)$$

Разделив в (16) переменные и проинтегрировав полученное уравнение, после ряда преобразований найдем

$$2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{2F_1}{m_{11}}} t + C_1, \quad (17)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставив в (17) начальные условия, определим C_1

$$C_1 = 0. \quad (18)$$

С учетом (18), из (17) найдем закон движения тела 1 вдоль оси x

$$x = \frac{F_1}{2m_{11}} t^2. \quad (19)$$

Теперь выразим скорость звена 1 через время t , для чего подставим (19) в (15). После ряда преобразований получим:

$$V_x = \frac{F_1}{m_{11}} t. \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) для определения перемещения и скорости звена 1 при его свободном перемещении вдоль оси x полностью совпадают с формулами, которые можно найти из второго закона Ньютона для материальной точки. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Так как тело 1 совершает сложное движение, то есть движется одновременно относительно двух систем координат, то используя теоремы о сложении скоростей и ускорений можно найти абсолютные движения всех его точек.

Теперь рассмотрим движение третьего звена вдоль оси y . Кинетическая энергия тела 2 в исследуемый момент времени при его движении вдоль оси y определится:

$$T_{\text{Пy}} = \frac{m_{33}V_y^2}{2}, \quad (21)$$

где $m_{33} = m_1 + m_2 + m_3$ – масса тел, которые перемещаются вместе с звеном 3.

Работа силы F_3 , действующей на тело 3 при его движении вдоль оси x_1 , будет

$$A_{\Gamma y} = F_3 y. \quad (22)$$

Подставим (21) и (22) в (9) и, учитывая, что $F_3 = bt^2$, получим:

$$\frac{m_{33} V_y^2}{2} = bt^2 y. \quad (23)$$

Из (23) найдем скорость звена 3 при его движении вдоль оси y

$$V_y = \sqrt{\frac{2b}{m_{22}} y} t. \quad (24)$$

Для определения закона движения тела 3 вдоль оси y представим (24) в виде

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2b}{m_{22}} y} t. \quad (25)$$

Разделив в (25) переменные и проинтегрировав полученное уравнение, после ряда преобразований найдем

$$2\sqrt{y} = \sqrt{\frac{2b}{m_{22}}} \frac{t^2}{2} + C_2, \quad (26)$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Подставив в (26) начальные условия, определим C_2

$$C_2 = 0. \quad (27)$$

С учетом (27), из (26) найдем закон движения тела 3 вдоль оси y

$$y = \frac{b}{8m_{22}} t^4. \quad (28)$$

Теперь выразим скорость звена 3 через время t , для чего подставим (28) в (24). После ряда преобразований получим

$$V_x = \frac{b}{2m_{33}} t^3. \quad (29)$$

Формулы (28) и (29) для определения перемещения и скорости звена 3 при его свободном перемещении вдоль оси y полностью совпадают с формулами, которые можно найти из второго закона Ньютона для материальной точки. Это свидетельствует о правильности применяемых для исследования движения уравнений.

Исследуем движение колеса 2. Из расчетной схемы (рис.1) видно, что колесо 2 вращается вокруг оси x . Тогда кинетическая энергия тела 2 в исследуемый момент времени при его вращении вокруг оси x определится

$$T_{Bx3} = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}, \quad (30)$$

где $I_2 = m_2 r_2^2$ – момент инерции колеса; ω_2 – угловая скорость колеса; r_2 – радиус колеса.

Работа момента силы M_2 , действующей на тело 3 при его вращении вокруг оси x , будет:

$$A_{Bx} = M_2 \varphi_2. \quad (31)$$

Подставим (30) и (31) в (11) и, учитывая, что $I_2 = m_2 r_2^2$ и $M_2 = M - k\omega_3^2$, получим

$$\frac{m_2 r_2^2 \omega_2^2}{2} = \varphi_2 (M - k\omega_2^2). \quad (32)$$

Преобразуем (32)

$$\omega_2^2 \left(1 + \frac{2k\varphi_2}{m_2 r_2^2} \right) = \frac{2M\varphi_2}{m_2 r_2^2}. \quad (33)$$

Из (33) найдем угловую скорость колеса 2 при его вращении вокруг оси x

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\varphi_2}{\frac{k}{M}\varphi_2 + \frac{m_2 r_2^2}{2M}}}. \quad (34)$$

Приведем (34) к удобному виду, для чего введем обозначения

$$A = \frac{m_2 r_2^2}{2M}, \quad (35)$$

$$B = \frac{k}{M}. \quad (36)$$

С учетом (40) и (41) угловая скорость колеса 3 (38) будет

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\varphi_2}{B\varphi_2 + A}}. \quad (37)$$

Для определения закона вращения тела 2 вокруг оси x представим (37) в виде

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \sqrt{\frac{\varphi_2}{B\varphi_2 + A}}. \quad (38)$$

Разделив переменные в (38) и проинтегрировав полученное уравнение, после ряда преобразований найдем

$$\sqrt{(A + B\varphi_2)} \varphi_2 - \frac{A}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{B}} \ln \left(\sqrt{(A + B\varphi_2)} + \sqrt{B\varphi_2} \right) \right] = t + C, \quad (39)$$

где C – постоянная интегрирования, которая при принятых начальных условиях определится:

$$C = -\frac{A}{2\sqrt{B}} \ln \sqrt{A}. \quad (40)$$

С учетом (40), из (39) найдем закон вращения тела 2 вокруг оси x

$$\sqrt{(A + B\varphi_2)} \varphi_2 - \frac{A}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{B}} \ln \left(\sqrt{(A + B\varphi_2)} + \sqrt{B\varphi_2} \right) \right] + \frac{A}{2\sqrt{B}} \ln \sqrt{A} = t. \quad (41)$$

Формулы (37), (38) и (41) определяют угловую скорость и угол поворота колеса 2 при его вращении вокруг оси x.

Так как тело 2 совершает сложное движение, то есть движется одновременно относительно трех систем координат, то, если это необходимо, используя теоремы о сложении скоростей, можно найти абсолютное движение любых точек колеса 2.

Итак, теорема об изменении кинетической энергии позволяет найти законы движения всех тел (звеньев) механической системы с тремя степенями свободы. Это свидетельствует об универсальности и эффективности этой теоремы.

Выводы

Доказано, что теорема об изменении кинетической энергии может применяться как для тел, так и для механических систем с любым числом степеней свободы.

Теорема об изменении кинетической энергии является универсальной теоремой, которая может эффективно применяться для исследования всех видов механического движения.

Литература:

1. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин : курсовое проектирование. – Москва-Новосибирск : ИНФРА-М, 2003. – 263 с.
2. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин : курсовое проектирование. – Москва-Новосибирск : ИНФРА-М, 2006. – 263 с.
3. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин : курсовое проектирование. – Москва-Новосибирск : ИНФРА-М, 2008. – 263 с.
4. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 1. – С. 21–25.
5. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 11–16.
6. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 17–26.
7. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 3. – С. 19–34.
8. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 4. – С. 21–29.
9. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 1. – С. 19–27.
10. Смелягин А.И. О необоснованности применения законов Ньютона для исследования динамики машин или современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них : в сборнике: проблемы механики современных машин / материалы VI международной конференции; ответственный редактор В.С. Балбаров. – 2015. – С. 344–350.
11. Смелягин А.И. Современные аксиомы движения материальных тел и следствия из них : в сборнике / XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики; сборник докладов; составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров; ответственные редакторы: Д.А. Губайдуллин, А.И. Елизаров, Е.К. Липачев. – 2015. – С. 3500–3502.
12. Смелягин А.И. Современные аксиомы и следствия из них для исследования динамики машин : в сборнике: Инновации в машиностроении (ИНМАШ-2015) / сборник трудов VII Международной научно-практической конференции. Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева, Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Новосибирский государственный технический университет, Бийский технологический институт, МИП Техмаш; под редакцией В.Ю. Блюменштейна, А.А. Баканова, О.А. Останина. – 2015. – С. 526–529.
13. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движений механических систем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 2. – С. 19–26.
14. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования механических систем вращательного движения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 3. – С. 19–27.
15. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движения колесницы / научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2015. – № 10. – С. 47–62.
16. Смелягин А.И. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование. – М. : ИНФРА-М, 2017. – 263 с.
17. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей и ускорений для исследования механических систем с помощью новых аксиом и теорем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2016. – № 2. – С. 21–29.
18. Смелягин А.И. Применение аналогов скоростей для исследования механических систем вращательного движения. Научные труды Кубанского государственного технологического университета. – 2016. – № 10. – С. 125–139.

19. Смелягин А.И. Теорема об изменении кинетической энергии тел и механических систем с несколькими степенями свободы // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2016. – № 3. – С. 26–34.

References:

1. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines : course design. – Moscow-Novosibirsk : INFRA-M, 2003. – 263 p.
2. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines : course design. – Moscow-Novosibirsk : INFRA-M, 2006. – 263 p.
3. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and machines : course design. – Moscow-Novosibirsk : INFRA-M, 2008. – 263 p.
4. Smelyagin A.I. Objects for which axioms or laws of classical mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – No. 1. – P. 21–25.
5. Smelyagin A.I. Axioms or laws of movement were formulated by I. Nyyuton // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – No. 2. – P. 11–16.
6. Smelyagin A.I. Basic, primary concepts of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – No. 2. – P. 17–26.
7. Smelyagin A.I. Axioms of movement of the material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – No. 3. P. 19–34.
8. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – No. 4. – P. 21–29.
9. Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations from them for a research of movements of the material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – No. 1. – P. 19–27.
10. Smelyagin A.I. About groundlessness of application of laws of Newton for a research of dynamics of machines or the modern axioms of movement of the material bodies and the investigation from them : in the collection: problems of mechanics of the modern machines / materials VI of the international conference; editor-in-chief V.S. Balbarov. – 2015. – P. 344–350.
11. Smelyagin A.I. The modern axioms of movement of the material bodies and the investigation from them : in the collection / the XI All-Russian congress on fundamental problems of theoretical and application-oriented mechanics; collection of reports; originators: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Haydarov; editor-in-chiefs: D.A. Gubaidulin, A.I. Yelizarov, E.K. Lipachev. – 2015. – P. 3500–3502.
12. Smelyagin A.I. The modern axioms and the investigations from them for a research of dynamics of machines : in the collection: Innovations in mechanical engineering (INMASH-2015) / collection of works VII of the International scientific and practical conference. Kuzbass state technical university of name T.F. Gorbachev, Altai state technical university of I.I. Polzunov, Novosibirsk state technical university, Biysk institute of technology, MIP Tekhmash; under edition V.Yu. Blyumenstein, A.A. Bakanova, O.A. Ostanina. – 2015. – P. 526–529.
13. Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of movements of mechanical systems // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – No. 2. – P. 19–26.
14. Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of mechanical systems of rotary motion // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – No. 3. – P. 19–27.
15. Smelyagin A.I. Application of new axioms and the investigations for a research of the movement of the chariot / scientific works of the Kuban state technological university. – 2015. – No. 10. – P. 47–62.
16. Smelyagin A.I. Theory of mechanisms and cars. Course design. – M. : INFRA-M, 2017. – 263 p.
17. Smelyagin A.I. Application of analogs of speeds and accelerations for a research of mechanical systems by means of new axioms and theorems // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2016. – No. 2. – P. 21–29.
18. Smelyagin A.I. Application of analogs of speeds for a research of mechanical systems of rotary motion. Scientific works of the Kuban state technological university. – 2016. – No. 10. – P. 125–139.
19. Smelyagin A.I. The theorem of change of kinetic energy of bodies and mechanical systems with several degrees of freedom // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2016. – No. 3. – P. 26–34.