

УДК 531.8

ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

APPLICATION OF NEW AXIOMS AND CONSEQUENCES FOR RESEARCH OF MECHANICAL SYSTEMS OF THE ROTARY MOTION

Смелягин Анатолий Игоревич

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики.
Кубанский государственный
технологический университет
Тел.: +7(861) 251-87-05
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoly Igorevich

Doctor of technical Sciences, Professor,
Head of Department of
theoretical mechanics.
Kuban State University of Technology
Ph.: +7(861) 251-87-05
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Используя новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы и уравнения движения материальных объектов природы проведено исследование двухступенчатого цилиндрического редуктора. Результаты исследования доказывают адекватность полученных ранее моделей реальным механическим системам, у которых все тела совершают только вращательные движения. Это позволяет рекомендовать новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы, и уравнения механики к широкому практическому применению для исследования, как материальных тел, так и механических систем у которых тела только вращаются.

Ключевые слова: движение, теорема, принцип, уравнение, следствие, сила, момент, энергия, соэнергия, скорость, ускорение, время, материальное тело, механическая система, механика, масса, момент инерции.

Annotation. Using new axioms, principles, effects, theorems and equations of motion of material objects of nature studied two-stage helical gear. The research results prove the adequacy of earlier models of the actual mechanical system, in which all the body make only the rotational movement. This allows you to recommend the new axioms, principles, effects, theorems and equations of mechanics to a wide practical application for research as material bodies and mechanical systems which rotate the body only.

Keywords: motion, a theorem the principle of the equation, consequently, force, moment, energy soenergy, velocity, acceleration, time, material body, mechanical system, mechanics, kinetostatics, mass, moment of inertia.

Введение

Основные положения механики о движении материальных объектов впервые были сформулированы великим английским ученым И. Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» [1]. Заметим, что современные трактовки законов Ньютона многообразны, хотя по смыслу и содержанию совершенно идентичны [2–5].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [6–10] показал, что они:

- описывают движение только абстрактных материальных объектов – материальных точек;
- пригодны только для тел, совершающих поступательное движение;
- не учитывают вращательное движение, а, следовательно, не применимы к телам, которые совершают вращательное или сложное движение.

В [9] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия для материальных объектов природы, а в [10] выведены и сформулированы теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы – материальных тел.

В [11, 12] показана эффективность и целесообразность применения новых аксиом и следствий из них для исследования сложных движений материальных тел и их систем.

Рассмотрим практическое применение приведенных в [9] аксиом и следствий из них при исследовании движений механических систем (редуктора, коробки скоростей, вариаторы), у которых тела совершают только вращательные движения.

Исследуем, например, движение валов и зубчатых колес, например, двухступенчатого редуктора (рис. 1).

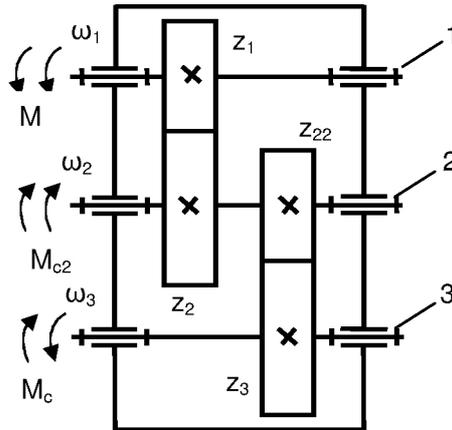


Рисунок 1 – Расчетная схема:

1 – входной вал; 2 – промежуточный вал; 3 – выходной вал;
4 – z_1, z_2, z_{22}, z_3 , соответственно, число зубьев зубчатых колес

При расчете редуктора считаем, что валы невесомаы, а установленные на них зубчатые колеса представляют собой сплошные однородные диски и имеют, соответственно, массы m_1, m_2, m_{22}, m_3 , числа зубьев z_1, z_2, z_{22}, z_3 , и радиусы r_1, r_2, r_{22}, r_3 . Пусть на входной вал 1 действует постоянный движущий момент $M = \text{const}$, а к промежуточному валу 2 и выходному валу 3 приложены, соответственно, постоянные моменты сопротивления ($M_{c2} = \text{const}, M_c = \text{const}$). Движение валов редуктора исследуем при следующих начальных условиях, что при $t = 0$ начальная скорость входного вала и угол его поворота равны нулю ($\omega_0 = 0, \varphi_0 = 0$).

Исследование движения валов редуктора проведем с помощью выведенных и сформулированы в [10] теорем, принципов и уравнений механики для реальных объектов природы – материальных тел. А именно, в данной работе для исследования движения колесницы воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии модифицированным уравнением Лагранжа II рода, общим уравнением динамики.

Теорема об изменении кинетической энергии

В [8] показано, что энергия является основным, первичным понятием определяющим движение и взаимодействие материальных объектов.

В [10] доказана теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что *изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.*

То есть

$$T - T_0 = A, \quad (1)$$

где $A = A_F + A_M$ – работа сил и моментов сил, действующих на механическую систему, на исследуемом перемещении; T и T_0 – кинетическая энергия исследуемой механической системы в конечном и начальном положении, соответственно.

При принятых начальных условиях $t = 0, \omega_0 = 0, \varphi_0 = 0$ кинетическая энергия исследуемого редуктора в начальном положении равна нулю, то есть

$$T_0 = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия редуктора определится как

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3)$$

где T_1, T_2, T_3 – кинетические энергии, соответственно, входного, промежуточного и выходного валов.

Найдем эти энергии.

Так как все валы редуктора совершают вращательное движение, то их кинетическая энергия определится

$$T_1 = \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2}, \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{(I_2 + I_{22}) \cdot \omega_2^2}{2}, \quad (5)$$

$$T_3 = \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2}, \quad (6)$$

где $I_1, I_2, I_{22}, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ – соответственно, моменты инерции зубчатых колес и угловые скорости валов редуктора, соответственно.

Так как зубчатые колеса представляют собой однородные диски, то их моменты инерции будут

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2, \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r_2^2, \quad (8)$$

$$I_{22} = \frac{1}{2} \cdot m_{22} \cdot r_{22}^2, \quad (9)$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot r_3^2. \quad (10)$$

Передаточные числа, выраженные через числа зубьев зубчатых колес и угловые скорости валов определяются

$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (11)$$

$$i_{23} = \frac{Z_3}{Z_{22}}, \quad (12)$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (13)$$

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3}. \quad (14)$$

Приравняв между собой (11) и (13), а так же (12) и (14), после преобразований получим

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2}, \quad (15)$$

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_{22}}{Z_2 \cdot Z_3}. \quad (16)$$

Подставив (4), (5) и (6) в (3) с учетом (7–16), найдем кинетическую энергию редуктора

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2) \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot r_3^2 \cdot \left(\frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right)^2 \right), \quad (17)$$

Обозначим

$$I_{пр} = \frac{1}{2} m_1 \cdot r_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2) \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot r_3^2 \cdot \left(\frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right)^2, \quad (18)$$

где $I_{пр}$ – приведенный момент инерции редуктора.

С учетом (18) кинетическая энергия редуктора (17), будет

$$T = \frac{I_{пр} \cdot \omega_1^2}{2}, \quad (19)$$

Определим работу действующих на валы редуктора моментов сил.

На входной вал редуктора (рис. 1) действует постоянный движущий момент M , а к промежуточному валу 2 и выходному валу 3 приложены, соответственно, постоянные моменты сопротивления M_{c2} и M_c . Следовательно, работа A определится

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3, \quad (20)$$

где A_1, A_2, A_3 – работы, соответственно, моментов M, M_{c2} и M_c .

Работы моментов валов редуктора определяются

$$A_1 = M \cdot \varphi_1, \quad (21)$$

$$A_2 = M_{c2} \cdot \varphi_2, \quad (22)$$

$$A_3 = M_c \cdot \varphi_3, \quad (23)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы поворота, соответственно, входного, промежуточного и выходного валов.

Связь между углами поворота валов имеет вид

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{z_1}{z_2}, \quad (24)$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3}. \quad (25)$$

С учетом (21–25), работа (20) моментов, действующих на валы редуктора, определится

$$\sum A_i = \varphi_1 \cdot \left(M - M_{c2} \cdot \frac{z_1}{z_2} - M_c \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right). \quad (26)$$

Так как выражение, стоящее в скобках (26) постоянно по величине, то обозначим его B

$$B = M - M_{c2} \cdot \frac{z_1}{z_2} - M_c \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3}. \quad (27)$$

С учетом (27), работа, действующих на редуктор моментов определится

$$A = B \cdot \varphi_1. \quad (28)$$

Для исследования движения валов редуктора, подставим (2), (19) и (28) в (1), в результате получим

$$\frac{I_{пр} \cdot \omega_1^2}{2} = B \cdot \varphi_1. \quad (29)$$

Из (29) найдем угловую скорость входного вала редуктора

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2B}{I_{пр}}} \varphi_1. \quad (30)$$

Представим (30) в виде

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \sqrt{\frac{2B}{I_{пр}}} \varphi_1. \quad (31)$$

После интегрирования (31), найдем закон движения входного вала редуктора

$$\varphi_1 = \frac{B \cdot t^2}{2I_{пр}} + C, \quad (32)$$

где C – постоянная интегрирования.

При принятых начальных условиях, что при $t = 0$ начальная скорость входного вала и угол его поворота равны нулю ($\omega_0 = 0, \varphi_0 = 0$), то $C = 0$.

С учетом, что $C = 0$ закон движения входного вала (32) примет вид

$$\varphi_1 = \frac{B \cdot t^2}{2I_{пр}}. \quad (33)$$

Подставив (33) в (30), найдем угловую скорость колесницы.

$$\omega_1 = \frac{B \cdot t}{I_{пр}}. \quad (34)$$

Итак, скорость и закон движения входного вала редуктора определены. Если необходимо знать законы движения промежуточного и выходного валов то, необходимо найденные значения φ_1 и ω_1 подставить в (24) и (25).

Модифицированное уравнение Лагранжа II рода

Для частного случая движения механической системы, когда $m = \text{const}, I = \text{const}$ и при скоростях тел, не зависящих от обобщенных координат, в [10] были получены уравнения, которые имеют следующий вид

$$m_{прi} \cdot u_i = Q_i, \quad (35)$$

где $m_{прi}$ – приведенная мера инерции (масса, момент инерции) i -го тела; Q_i – обобщенная сила; u_i – соответствующее движению ускорение; $u_i = a$ и $u_i = \varepsilon$ при поступательном и вращательном движении, соответственно.

Применим (35) для исследования двухступенчатого цилиндрического редуктора. Так как для рассматриваемого редуктора $I_{пр} = \text{const}$ (см. (18)), то, воспользуемся модифицированным уравнением Лагранжа для исследования редуктора (рис. 1). Найдем угловую скорость и закон перемещение входного вала редуктора.

Так как входной вал совершает вращательное движение, то, в соответствии с (35), его движение будет описываться уравнением

$$I_{\text{пр}} \cdot \varepsilon_1 = Q, \quad (36)$$

где $I_{\text{пр}}$ – приведенный момент инерции редуктора; $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ – угловое ускорение входного вала; $Q = \frac{\delta A}{\delta \varphi_1}$ – обобщенная сила; $\delta \varphi_1$ – виртуальное перемещение входного вала; δA – работа моментов, действующих на валы редуктора, на виртуальном перемещении.

Представим (36) в виде

$$I_{\text{пр}} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = Q. \quad (37)$$

Для определения обобщенной силы, сообщим валам редуктора виртуальные перемещения (на рис. 1 виртуальные перемещения не показаны).

Работа валов на виртуальном перемещении в соответствии с (26) определится

$$\delta A = \left(M - M_{c2} \cdot \frac{z_1}{z_2} - M_c \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right) \cdot \delta \varphi_1. \quad (38)$$

Обобщенная сила Q с учетом (38) будет

$$Q = M - M_{c2} \cdot \frac{z_1}{z_2} - M_c \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3}. \quad (39)$$

С учетом (27) обобщенная сила определится

$$Q = B. \quad (40)$$

Подставив (40) в (37), получим дифференциальное уравнение движения (вращения) входного вала редуктора

$$I_{\text{пр}} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = B. \quad (41)$$

Разделив переменные и проинтегрировав (41), найдем, соответственно, угловую скорость и закон движения входного вала редуктора

$$\omega_1 = \frac{B}{I_{\text{пр}}} \cdot t + C_1, \quad (42)$$

$$\varphi_1 = \frac{B}{2I_{\text{пр}}} \cdot t^2 + C_1 t + C_2, \quad (43)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

При принятых начальных условиях, что при $t = 0$ $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$

$$C_1 = 0, \quad (44)$$

$$C_2 = 0. \quad (45)$$

С учетом (44) и (45), угловая скорость и закон движения входного вала редуктора, соответственно, определяются

$$\omega_1 = \frac{B}{I_{\text{пр}}} \cdot t, \quad (46)$$

$$\varphi_1 = \frac{B}{2I_{пр}} \cdot t^2. \quad (47)$$

Сравнивая между собой угловые скорости и законы движения входного вала редуктора, найденные с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (33), (34) и с помощью модифицированного уравнения Лагранжа II рода (46), (47), видно, что они полностью совпадают между собой. Это свидетельствует о правильности следствий и теорем, полученных в [9] и [10].

Следовательно, полученные в [10] теоремы и уравнения являются корректным и поэтому они могут быть рекомендованы для исследования механических систем, у которых звенья (материальные тела) совершают только вращательные движения.

Общее уравнение динамики

В [10] на базе новых аксиом и следствий движения материальных объектов природы получено общее уравнение динамики, которое имеет вид

$$\sum \delta A_i + \sum \delta A_{\varphi_i} = 0, \quad (48)$$

где $\sum \delta A_i$ – работа активных сил и моментов сил на виртуальном перемещении;
 $\sum \delta A_{\varphi_i}$ – работа моментов сил инерции на виртуальном перемещении.

Из (1) следует, что *сумма работ активных и инерционных сил и моментов сил на возможном перемещении равна нулю.*

Исследуем движение валов редуктора с помощью общего уравнения динамики (1). Для чего сообщим валам редуктора (рис. 1) виртуальные перемещения (на рис. 1 виртуальные перемещения не показаны).

Работа моментов на виртуальном валов определится

$$M \delta \varphi_1 - M_{c2} \delta \varphi_2 - M_c \delta \varphi_3 - M_{\varphi 1} \delta \varphi_1 - M_{\varphi 2} \delta \varphi_2 - M_{\varphi 3} \delta \varphi_3 = 0, \quad (49)$$

где $\delta \varphi_1, \delta \varphi_2, \delta \varphi_3$ – виртуальные перемещения входного, промежуточного и выходного валов, соответственно.

Так как в исследуемой механической системе имеется жесткая кинематическая связь между валами, то виртуальные перемещения валов будут

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2}, \quad (50)$$

$$\delta \varphi_3 = \delta \varphi_1 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_{22}}{Z_2 \cdot Z_3}. \quad (51)$$

Найдем моменты сил инерции.

Моменты сил инерции входного $M_{\varphi 1}$, промежуточного $M_{\varphi 2}$ и выходного $M_{\varphi 3}$ валов, соответственно, определяются

$$M_{\varphi 1} = I_1 \cdot \varepsilon_1, \quad (52)$$

$$M_{\varphi 2} = (I_2 + I_{22}) \cdot \varepsilon_2, \quad (53)$$

$$M_{\varphi 3} = I_3 \cdot \varepsilon_3, \quad (54)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$, $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}$, $\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$ – соответственно, угловые ускорения входного, промежуточного и выходного валов.

Угловые ускорения валов связаны между собой следующим образом

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}, \quad (55)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3}. \quad (56)$$

С учетом (7–10) и (55, 56), момент сил инерции валов определяются

$$M_{\phi 1} = I_1 \cdot \varepsilon_1, \quad (57)$$

$$M_{\phi 2} = (I_2 + I_{22}) \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{z_1}{z_2}, \quad (58)$$

$$M_{\phi 3} = I_3 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3}. \quad (59)$$

Подставив найденные значения моментов (57–59), в (2), и учитывая (7–10) и (50, 51), получим

$$\left(M - M_{c2} \cdot \frac{z_1}{z_2} - M_c \cdot \frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right) \delta \varphi_1 - \left(\frac{1}{2} m_1 \cdot r_1^2 + \left(\frac{1}{2} m_2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} m_{22} \cdot r_{22}^2 \right) \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot r_3^2 \cdot \left(\frac{z_1 \cdot z_{22}}{z_2 \cdot z_3} \right)^2 \right) \cdot \varepsilon_1 \delta \varphi_1 = 0, \quad (60)$$

После преобразования (60) с учетом (18) и (27), получим

$$I_{np} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = B. \quad (61)$$

Видно, что дифференциальное уравнение (61) совпадает с уравнением (41) и, следовательно, оно моделирует вращение входного вала редуктора.

Сравнивая между собой дифференциальные уравнения движения валов редуктора, найденные с помощью модифицированного уравнения Лагранжа II рода и общее уравнение динамики, видно, что они полностью совпадают между собой. Это свидетельствует о правильности следствий и теорем, полученных в [9] и [10] и в частности подтверждает правильность найденного в [10] общего уравнения динамики.

Выводы

Применение полученных ранее новых аксиом, принципов, следствий, теорем и уравнений движения материальных объектов природы (твердых тел) для исследования механических систем, которые имеют в своем состав только вращающиеся тела, дало одинаковые результаты. Следовательно, они адекватны реальным объектам и поэтому их можно рекомендовать для практического применения.

Литература:

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М. : Наука, 1989. – 688 с.
2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2000. – 720 с.
3. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. – Киев : Наук. Думка, 1989. – 864 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
5. Кухлинг Х. Справочник по физике / Перевод с нем. – М. : МИР, 1983. – 520 с.
6. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 1. – С. 21–25.

7. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 11–16.
8. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 17–26.
9. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – №3. – С. 19–34.
10. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. № 4. – С. 21–29.
11. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 1. – С. 19–27.
12. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий для исследования движений механических систем // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 2. – С. 19–26.

References:

1. Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural philosophy. – M. : Nauka, 1989. – 688 p.
2. Golubev Y.F. Basics of theoretical mechanics. 2nd ed. – M. : MGU, 2000. – 720 p.
3. Kuzmichev V.E. Laws and formulas of physics. – Kiev : Science Dumka, 1989. – 864 p.
4. N. Nikitin. Course of theoretical mechanics. – M. : Higher sh., 1990. – 607 p.
5. Kuhling H. Handbook of physics. – Translated from the German. – M. : Mir, 1983. – 520 p.
6. Smelyagin A.I. Objects for which the axioms or laws of classical mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 1. – P. 21–25.
7. Smelyagin A.I. Axioms or laws of motion formulated by Newton // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 11–16.
8. Smelyagin A.I. Basic, primary concepts of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 17–26.
9. Smelyagin A.I. The axioms of motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 3. – P. 19–34.
10. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 4. – P. 21–29.
11. Smelyagin A.I. Application of new axioms and their consequences for the study of the motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 1. – P. 19–27.
12. Smelyagin A.I. Practical use of new axioms and corollaries for research motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 2. – P. 19–26.