

УДК 531.8

## ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### APPLICATION OF NEW AXIOMS AND CONSEQUENCES FOR RESEARCH OF MOVEMENTS OF MECHANICAL SYSTEMS

**Смелягин Анатолий Игоревич**

доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой теоретической механики,  
Кубанский государственный  
технологический университет  
asmelyagin@yandex.ru

**Smelyagin Anatoly Igorevich**

Doctor of technical Sciences,  
Professor, head of Department of  
theoretical mechanics  
Kuban State University of Technology

**Аннотация.** Используя новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы и уравнения движения материальных объектов природы проведено исследование подъёма колесницы по наклонной плоскости. Результаты исследования доказывают адекватность полученных ранее моделей реальным материальным механическим системам. Это позволяет рекомендовать новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы, и уравнения механики к широкому практическому применению для исследования как материальных тел, так и механических систем.

**Annotation.** Using new axioms, principles, effects, theorems and equations of motion of material objects of nature studied lifting chariots on an inclined plane. Results of the study demonstrate the adequacy of previously obtained models material real mechanical systems. This allows you to recommend the new axioms, principles, investigation, theorems and equations of mechanics to a wide practical application for the study of how the material body, and mechanical systems.

**Ключевые слова:** движение, теорема, принцип, уравнение, следствие, сила, момент, энергия, соэнергия, скорость, ускорение, время, материальное тело, механическая система, механика, кинетостатика, масса, момент инерции.

**Keywords:** motion, a theorem the principle of the equation, consequently, force, moment, energy soenergy, velocity, acceleration, time, material body, mechanical system, mechanics, kinetostatics, mass moment of inertia.

### Введение

Основные положения механики о движении материальных объектов впервые вместе были сформулированы великим английским ученым И. Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» [1]. Заметим, что современные трактовки законов Ньютона многообразны, хотя по смыслу и содержанию совершенно идентичны [2–5].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [6–10] показал, что они:

- сформулированы только для абстрактных материальных объектов — материальной точки и системы материальных точек;
- первая и вторая традиционные аксиомы (законы) механики не являются ни законами, ни аксиомами, так как это следствия из других аксиом;
- второй и третий закон — это законы не о движении материальных тел, а это аксиомы о взаимодействии тел.

Следовательно, законы Ньютона корректно можно использовать только для исследования не существующих в природе объектов, а именно материальных точек.

В [9] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия для материальных объектов природы, а в [10] выведены и сформулированы теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы — материальных тел.

В [11] показана эффективность и целесообразность применения новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел.

Рассмотрим практическое применение приведенных в [9] аксиом и следствий из них при исследовании движений механических систем.

Изучим, например, подъём по наклонной плоскости колесницы с помощью барабана (рис. 1).

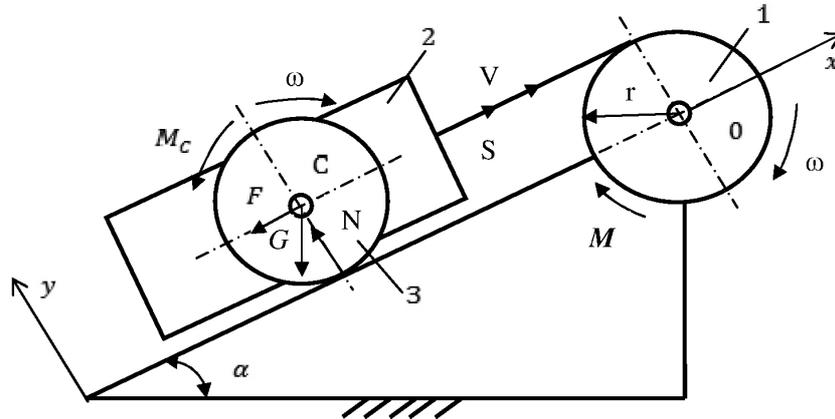


Рис. 1. Расчетная схема: 1 – барабан; 2 – кузов; 3 – колесо

При расчете колесницы считаем, что барабан 1 и колесо 2 имеют, соответственно, массы  $m_1$  и  $m_2$ , а их радиусы, с целью упрощения расчетов, равны между собой, то есть  $r_1 = r_2 = r$  при этом барабан представляет собой однородный диск, а колесо — кольцо. Пусть на барабан действует постоянный движущий момент  $M$ , а на колесо колесницы — момент сопротивления качению  $M_c$ . Кузов колесницы 2 имеет массу  $m_3$ .

Качение колесницы исследуем при следующих начальных условиях —  $t = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$ , где  $V_0$  — начальная скорость и  $S_0$  — перемещение колесницы.

Исследование движения колесницы проведем с помощью выведенных и сформулированы в [10] теорем, принципов и уравнений механики для реальных объектов природы — материальных тел. А именно, в данной работе для исследования движения колесницы применим теорему об изменении кинетической энергии и модифицированное уравнение Лагранжа II рода.

### Теорема об изменении кинетической энергии

В [8] показано, что энергия является основным, первичным понятием определяющим движение и взаимодействие материальных объектов.

В [10] доказана теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что *изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.*

То есть

$$T - T_0 = A, \quad (1)$$

где  $A = A_F + A_M$  — работа сил и моментов сил, действующих на механическую систему, на исследуемом перемещении;  $T$  и  $T_0$  — кинетическая энергия исследуемой механической системы в конечном и начальном положении, соответственно.

При принятых начальных условиях  $t = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$  кинетическая энергия исследуемой механической системы в начальном положении равна нулю, то есть

$$T_0 = 0. \quad (2)$$

Кинетическая энергия колесницы в исследуемом положении определится как

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  — кинетические энергии, соответственно, барабана, кузова и колеса колесницы.

Найдем эти энергии.

Так как барабан совершает вращательное движение, то его кинетическая энергия будет

$$T_1 = \frac{I_1 \cdot \omega^2}{2}, \quad (4)$$

где  $I_1$ ,  $\omega$  — соответственно, момент инерции и угловая скорость барабана.

Так как барабан представляет собой однородный диск, то его момент инерции будет

$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r^2. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot r^2 \cdot \omega^2}{4}. \quad (6)$$

Так как линейная и угловая скорости барабана связаны между собой следующим соотношением

$$V = \omega \cdot r. \quad (7)$$

То кинетическая энергия барабана (6) с учетом (7) будет

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot V^2}{4}, \quad (8)$$

где  $V$  — скорость кузова колесницы.

Теперь найдем кинетическую энергию кузова колесницы. Так как кузов движется поступательно, то его кинетическая энергия определится

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot V^2}{2}. \quad (9)$$

Колесо колесницы совершает плоскопараллельное движение, следовательно, его кинетическая энергия будет

$$T_3 = T_n + T_b, \quad (10)$$

где  $T_n$ ,  $T_b$  — кинетическая энергия колеса при его поступательном и вращательном движении, соответственно.

Кинетическая энергия колеса, соответственно при поступательном и вращательном движении будет

$$T_n = \frac{m_3 \cdot V^2}{2}, \quad (11)$$

$$T_b = \frac{I_3 \cdot \omega^2}{2}, \quad (12)$$

где  $I_3$  — момент инерции колеса.

$$I_3 = m_3 \cdot r^2. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$T_b = \frac{m_3 \cdot r^2 \cdot \omega^2}{2}. \quad (14)$$

С учетом (7), кинетическая энергия (14) будет

$$T_B = \frac{m_3 \cdot V^2}{2}. \quad (15)$$

Подставив в (10), кинетические энергии (11) и (15), определим полную кинетическую энергию колеса

$$T_3 = m_3 \cdot V^2. \quad (16)$$

Подставив в (3), кинетические энергии барабана (8), кузова (9) и колеса (16), найдем кинетическую энергию колесницы

$$T = \frac{V^2}{2} \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 + 2m_3 \right). \quad (17)$$

Введем обозначение

$$m_{\text{пр}} = \frac{1}{2} m_1 + m_2 + 2m_3, \quad (18)$$

где  $m_{\text{пр}}$  — приведенная масса колесницы.

С учетом (18), кинетическая энергия колесницы будет

$$T = \frac{m_{\text{пр}} \cdot V^2}{2}. \quad (19)$$

Определим работу, действующих на колесницу сил и моментов сил. На колесницу (рис. 1) действуют силы тяжести кузова и колеса  $G$ , движущий  $M$  и сопротивления  $M_c$  моменты. Следовательно, работа  $A$  определится

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \quad (20)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  — работы движущего момента, сил тяжести кузова и колеса и момента сопротивления, соответственно.

Работа, приводящего барабан во вращение, движущего момента определится

$$A_1 = M \cdot \varphi_1, \quad (21)$$

где  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  — угол поворота барабана и колеса.

Перемещение кузова  $S$  связано с углом поворота барабана следующей зависимостью

$$S = r \cdot \varphi. \quad (22)$$

С учетом (22), работа движущего момента определится

$$A_1 = M \cdot \frac{S}{r}. \quad (23)$$

Сила тяжести  $G$ , действующая на колесницу, определится как

$$G = (m_2 + m_3) \cdot g, \quad (24)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Разложим силу тяжести на две составляющие — нормальную силу  $N$  и силу, препятствующую перемещению тележки,  $F$ . Найдем эти силы

$$F = (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \sin \alpha, \quad (25)$$

$$N = (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \cos \alpha. \quad (26)$$

Момент сопротивления  $M_c$ , определится

$$M_c = \mu \cdot N, \quad (27)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения качения.

С учетом (26), момент сопротивления  $M_c$  будет

$$M_c = \mu \cdot (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \cos \alpha. \quad (28)$$

Работа сил тяжести кузова и колеса  $A_2$  определится

$$A_2 = -F \cdot S. \quad (29)$$

С учетом (29), работа сил тяжести  $A_2$  будет

$$A_2 = -(m_2 + m_3) \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha. \quad (30)$$

Работа момента сопротивления качению колеса  $A_3$  определится

$$A_3 = -M_c \cdot \varphi_3.$$

С учетом (22) и (28), работа момента сопротивления  $A_3$  будет

$$A_3 = -\mu \cdot (m_2 + m_3) \cdot \frac{S}{r} \cdot g \cdot \cos \alpha. \quad (31)$$

Подставив (23), (30) и (31) в (20), найдем работу, действующих на колесницу сил и моментов сил

$$A = S \cdot \left[ \frac{M}{r} - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \left( \sin \alpha + \frac{\mu}{r} \cdot \cos \alpha \right) \right]. \quad (32)$$

Так как выражение, стоящее в квадратных скобках (32) постоянно по величине, то обозначим его  $B$

$$B = \frac{M}{r} - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \left( \sin \alpha + \frac{\mu}{r} \cdot \cos \alpha \right). \quad (33)$$

С учетом (33), работа, действующих на колесницу сил и моментов сил определится

$$A = B \cdot S. \quad (34)$$

Для исследования движения колесницы, подставим (2), (19), и (34) в (1), в результате получим

$$\frac{m_{\text{пр}} \cdot V^2}{2} = B \cdot S. \quad (35)$$

Из (35) найдем скорость подъема колесницы

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot B}{m_{\text{пр}}} \cdot S}. \quad (36)$$

Представим (36) в виде

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2 \cdot B}{m_{\text{пр}}} \cdot S}. \quad (37)$$

После интегрирования (37), найдем закон движения колесницы

$$S = \frac{B}{2 \cdot m_{\text{пр}}} \cdot t^2 + C, \quad (38)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

При принятых начальных условиях, что при  $t = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$

$$C = 0. \quad (39)$$

С учетом (39), закон движения колесницы (38) примет вид

$$S = \frac{B}{2 \cdot m_{\text{пр}}} \cdot t^2. \quad (40)$$

Подставив (40) в (36), найдем скорость колесницы

$$V = \frac{B}{m_{\text{пр}}} \cdot t. \quad (41)$$

Итак, скорость и закон движения колесницы определены. Если необходимо знать законы движения колеса и барабана то, необходимо найденные значения  $S$  и  $V$  подставить в (7) и (22) и решить их относительно угловой скорости  $\omega$  и угла поворота  $\varphi$ .

### Модифицированное уравнение Лагранжа II рода

Для частного случая движения механической системы, когда  $m = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$  и при скоростях тел, не зависящих от обобщенных координат, в [10] были получены уравнения, которые имеют следующий вид

$$m_{\text{пр}i} \cdot u_i = Q_i, \quad (42)$$

где  $m_{\text{пр}i}$  — приведенная масса  $i$ -го тела;  $Q_i$  — обобщенная сила;  $u_i$  — соответствующее движению ускорение;  $u_i = a$  и  $u_i = \varepsilon$  при поступательном и вращательном движении, соответственно.

Применим (42) для исследования механических систем. Так как для рассматриваемой колесницы  $m_{\text{пр}} = \text{const}$  (см. (18)), то, воспользуемся модифицированным уравнением Лагранжа для исследования качения колесницы по наклонной плоскости (рис. 1).

Найдем скорость и перемещение кузова колесницы. Так как кузов колесницы совершает поступательное движение, то, в соответствии с (42), его движение будет описываться уравнением

$$m_{\text{пр}} \cdot a = Q, \quad (43)$$

где  $m_{\text{пр}}$  — приведенная масса колеса;  $a = \frac{dV}{dt}$  — ускорение кузова;  $Q = \frac{\delta A}{\delta S}$  — обобщенная сила;  $\delta S$  — виртуальное перемещение;  $\delta A$  — работа сил и моментов сил, действующих на колесницу, на виртуальном перемещении. Представим (43) в виде

$$m_{\text{пр}} \cdot \frac{dV}{dt} = Q. \quad (44)$$

Для определения обобщенной силы, сообщим колеснице виртуальные перемещения (на рисунке 1 виртуальные перемещения не показаны).

Работа колесницы на виртуальном перемещении в соответствии с (32) определится

$$\delta A = \left[ \frac{M}{r} - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \left( \sin \alpha + \frac{\mu}{r} \cdot \cos \alpha \right) \right] \delta S. \quad (45)$$

Обобщенная сила  $Q$  с учетом (45) будет

$$Q = \frac{M}{r} - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot \left( \sin \alpha + \frac{\mu}{r} \cdot \cos \alpha \right). \quad (46)$$

С учетом (33) обобщенная сила определится

$$Q = B. \quad (47)$$

Подставив (47) в (44), получим дифференциальное уравнение движения кузова колесницы

$$m_{\text{пр}} \cdot \frac{dV}{dt} = B. \quad (48)$$

Разделив переменные и проинтегрировав (48), найдем, соответственно, скорость и закон движения кузова колесницы

$$V = \frac{B}{m_{\text{пр}}} \cdot t + C_1, \quad (49)$$

$$S = \frac{B}{2 \cdot m_{\text{пр}}} \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2, \quad (50)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования.

При принятых начальных условиях, что при  $t = 0, V_0 = 0, S_0 = 0$

$$C_1 = 0, \quad (51)$$

$$C_2 = 0. \quad (52)$$

С учетом (51) и (52), скорость и закон движения кузова колесницы, соответственно, определяются

$$V = \frac{B}{m_{\text{пр}}} \cdot t, \quad (53)$$

$$S = \frac{B}{2 \cdot m_{\text{пр}}} \cdot t^2, \quad (54)$$

Сравнивая между собой скорости и законы движения перемещающейся по наклонной плоскости колесницы, найденные с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (40), (41) и с помощью модифицированного уравнения Лагранжа II рода (53), (54), видно, что они полностью совпадают между собой. Это свидетельствует о правильности следствий и теорем, полученных в [9] и [10].

Следовательно, полученные в [10] теоремы и уравнения являются корректным и поэтому они могут быть рекомендованы для исследования механических систем.

### Выводы

Применение полученных ранее новых аксиом, принципов, следствий, теорем и уравнений движения материальных объектов природы для исследования механических систем, дали одинаковые результаты. Следовательно, они адекватны реальным объектам и поэтому их можно рекомендовать для практического применения.

### Литература:

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М. : Наука, 1989. – 688 с.
2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2000. – 720 с.
3. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. – Киев : Наук. Думка, 1989. – 864 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
5. Кухлинг Х. Справочник по физике / Перевод с нем. – М. : МИР, 1983. – 520 с.

6. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 1. – С. 21–25.
7. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 11–16.
8. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 17–26.
9. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 3. – С. 19–34.
10. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 4. – С. 21–29.
11. Смелягин А.И. Применение новых аксиом и следствий из них для исследования движений материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2015. – № 1. – С. 19–27.

### References:

1. Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural Philosophy. – M. : Nauka, 1989. – 688 p.
2. Golubev Y.F. Basics of theoretical mechanics. 2nd ed. – M. : MGU, 2000. – 720 p.
3. Kuz'michev V.E. Laws and formulas of physics. – Kiev : Science. Dumka, 1989. – 864 p.
4. N. Nikitin Course of theoretical mechanics. – M. : Higher. sh., 1990. – 607 p.
5. Kuhling H. Handbook of physics. – Translated from the German. – M. : Mir, 1983. – 520 p.
6. Smelyagin A.I. Objects for which the axioms or laws of classical mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 1. – P. 21–25.
7. Smelyagin A.I. Axioms or laws of motion formulated by Newton // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). Scientific journal. – 2014. – № 2. – P. 11–16.
8. Smelyagin A.I. Basic, primary concepts of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 17–26.
9. Smelyagin A.I. The axioms of motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 3. – P. 19–34.
10. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanics. Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 4. – P. 21–29.
11. Smelyagin A.I. Application of new axioms and their consequences for the study of the motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2015. – № 1. – P. 19–27.