УДК 531.8

ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ НИХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

–––––––

PRACTICAL USE OF NEW AXIOMS AND COROLLARIES FOR RESEARCH MOTION OF MATERIAL BODIES

Смелягин Анатолий Игоревич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики,
Кубанский государственный
технологический университет
asmelyagin@yandex.ru

Smelyagin Anatoly Igorevich
doctor of technical Sciences, Professor,
head of Department of
theoretical mechanics,
Kuban State University of Technology
asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. Используя новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы и уравнения движения материальных объектов природы проведено исследование качения колеса по наклонной плоскости. Результаты исследования доказывают адекватность полученных ранее моделей реальным материальным телам. Это позволяет рекомендовать новые аксиомы, принципы, следствия, теоремы, и уравнения механики к широкому практическому применению.

Ключевые слова: движение, теорема, принцип, уравнение, следствие, сила, момент, энергия, соэнергия, скорость, ускорение, время, материальное тело, механический объект, механика, кинетостатика, масса, момент инерции.

Annotation. Using the new axioms, principles, effects, theorems and equations of motion of material objects of nature investigated wheel rolling down an inclined plane. Results of the study demonstrate the adequacy of previously obtained models of real material bodies. This allows us to recommend new axioms, principles, effects, theorems and equations of mechanics to a wide practical application.

Keywords: motion, theorem, principle, equation, effect, force, torque, energy, soenergiya, velocity, acceleration, time, material body, mechanics, kinetostatics, mass, moment of inertia.

Введение

Основные положения механики о движении материальных объектов впервые вместе были сформулированы великим английским ученым И. Ньютоном в «Математических началах натуральной философии» [1]. Отметим, что современные трактовки законов Ньютона многообразны, хотя по смыслу и содержанию совершенно идентичны [2–5].

Анализ оригинальных и современных формулировок аксиом или законов движения И. Ньютона в [6–10] показал, что они:

– сформулированы только для абстрактных материальных объектов — материальной точки и системы материальных точек;

– первая и вторая традиционные аксиомы (законы) механики не являются ни законами, ни аксиомами, так как это следствия из других аксиом;

– второй и третий закон — это законы не о движении материальных тел, а это аксиомы о взаимодействии тел.

Следовательно, законы Ньютона корректно можно использовать только для исследования не существующих в природе объектов, а именно материальных точек.

В [9] сформулированы основные аксиомы, принципы и следствия для материальных объектов природы, а в [10] выведены и сформулированы теоремы, принципы и уравнения механики для реальных объектов природы — материальных тел.

Рассмотрим практическое применение новых аксиом и следствий из них при исследовании механических движений твердых тел.

Изучим, например, качение по наклонной плоскости колеса. Пусть исследуемое колесо представляет собой тонкостенное кольцо радиусом *r*, масса *m* которого равномерно распределена по ободу (рис. 1). На колесо при его качении действует момент сопротивления M_c.

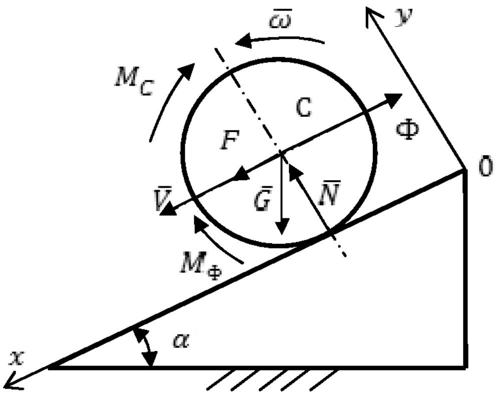

Рис.1. Расчетная схема

Качение колеса исследуем при следующих начальных условиях:

$$t = 0; V_0 = 0; x_0 = 0; \varphi_0 = 0; \omega_0 = 0.$$

Исследование движения колеса проведем разными методами.

Уравнение движения материального тела

В [9] получено следствие, которое гласит, что изменение соэнергии тела во времени равно сумме сил и моментов сил, взаимодействующих с ним тел.

То есть

$$\frac{d\bar{K}_i}{dt} = \bar{Q}_i, \tag{1}$$

где i = 1, 2.

При $i = 1$ $\bar{K}_1 = \bar{K}_n$ и $\bar{Q}_1 = \bar{F}$.

При $i = 2$ $\bar{K}_2 = \bar{K}_в$ и $\bar{Q}_2 = \bar{M}$.

где $\bar{K}_n = m \cdot \bar{V}$ — соэнергия поступательно движущегося тела; $\bar{V}$ — скорость центра масс тела; $\bar{F}$ — главный вектор сил; $\bar{K}_в = I \cdot \bar{\omega}$ — соэнергия вращающегося тела; $\bar{\omega}$ — угловая скорость тела; $\bar{M}$ — главный момент (вектор моментов сил); I — момент инерции тела.

В соответствии с (1) уравнения движения материального тела будут иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{K}_n}{dt} = \bar{F}; \\ \dfrac{d\bar{K}_в}{dt} = \bar{M}. \end{cases} \tag{2}$$

В частном случае при m = const и I = const, из (2) получим

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i; \\ I \cdot \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} = \sum \bar{M}_i. \end{cases} \tag{3}$$

Для исследования движения колеса (рис. 1), спроецируем систему уравнений (3) на оси координат x и y и найдем составляющие входящие в эту систему.

Модули сил движущей $\bar{F}$, веса $\bar{G}$, реакции опоры $\bar{N}$ и момент сопротивления качению $\bar{M}_c$ определятся, соответственно:

$$F = m \cdot g \cdot \sin\alpha\,; \tag{4}$$

$$G = m \cdot g\,; \tag{5}$$

$$N = m \cdot g \cdot \cos\alpha\,; \tag{6}$$

$$M_c = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha\,, \tag{7}$$

где μ — коэффициент трения качения.

Момент инерции колеса относительно оси качения определится

$$I = m \cdot r^2. \tag{8}$$

После подстановки (4–8) в (3) и ряда преобразований получим

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = g \cdot \sin\alpha; \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot g \cdot \cos\alpha}{r^2}. \end{cases} \tag{9}$$

Линейная и угловая скорости качения колеса связанны между собой следующим соотношением

$$V = \omega \cdot r\,. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9) и учитывая, что $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dV}{dt}$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = g \cdot \sin\alpha; \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot g \cdot \cos\alpha}{r}. \end{cases} \tag{11}$$

Из расчетной схемы (рис. 1) видно, что колесо совершает плоскопараллельное движение, которое состоит из суммы двух движений — поступательного и вращательного. Следовательно, сложим уравнения, входящие в систему (11). В результате получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{2}. \tag{12}$$

Решив (12) с учетом начальных условий, соответственно, для колеса найдем:

- линейную скорость

$$V = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{2} \cdot t\,; \tag{13}$$

- угловую скорость

$$\omega = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{2r} \cdot t\,; \tag{14}$$

- перемещение

$$x = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{4} \cdot t^2\,; \tag{15}$$

- угол поворота

$$\varphi = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{4r} \cdot t^2; \tag{16}$$

Из формул (13–16) следует, что колесо будет перемещаться по наклонной плоскости только при выполнении следующего условия

$$\sin\alpha > \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha.$$

Итак, используя полученные в [9] новые уравнения движения материальных тел, найдены все кинематические параметры, определяющие качение колеса по наклонной плоскости.

Теорема об изменении кинетической энергии

В [8] показано, что энергия является основным, первичным понятием определяющим движение и взаимодействие материальных объектов.

В [10] доказана теорема об изменении кинетической энергии материального тела, которая утверждает, что изменение кинетической энергии тела при его перемещении равно работе сил и моментов сил, действующих на него на этом перемещении.

То есть

$$T_1 - T_0 = A, \tag{17}$$

где $A = A_F + A_M$ — работа сил и моментов сил на исследуемом перемещении; $T_1 = T_{п1} + T_{в1}$ и $T_0 = T_{п0} + T_{в0}$, — кинетическая энергия тела в конечном и начальном положении, соответственно.

Найдем закон движения катящегося по наклонной плоскости колеса. Из расчетной схемы (рис. 1) видно, что катящееся колесо совершает плоское движение, которое состоит из суммы двух движений — поступательного и вращательного.

Кинетическая энергия колеса в исследуемом положении определится

$$T_1 = \frac{m \cdot V^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \tag{18}$$

Подставив в (18) величины из (8) и (10), после преобразований получим

$$T_1 = m \cdot V^2. \tag{19}$$

Кинетическая энергия T_0 колеса в начальном положении при начальных условиях $t = 0$; $V_0 = 0$; $x_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$ будет равна нулю, то есть

$$T_0 = 0. \tag{20}$$

С учетом (4–7), работа A сил и моментов сил на исследуемом перемещении колеса определится

$$A = m \cdot g \cdot (x \cdot \sin\alpha - \mu \cdot \varphi \cdot \cos\alpha). \tag{21}$$

Установим связь между линейным и угловым перемещением колеса

$$\varphi = \frac{x}{r}. \tag{22}$$

С учетом (22) работа (21) примет вид

$$A = m \cdot g \cdot x \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right). \tag{23}$$

Подставив в (17) формулы (19), (20) и (23), после преобразований получим

$$V=\sqrt{g\cdot x\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\mu}{r}\cdot\cos\alpha\right)} \qquad (24)$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{g\cdot x\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\mu}{r}\cdot\cos\alpha\right)}. \qquad (25)$$

Решив (25) с учетом принятых начальных условий, найдем закон движения колеса по наклонной плоскости

$$x=\frac{g\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\mu}{r}\cdot\cos\alpha\right)}{4}\cdot t^2. \qquad (26)$$

Подставив в (24) закон движения колеса (26), в найдем скорость колеса

$$V=\frac{g\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\mu}{r}\cdot\cos\alpha\right)}{2}\cdot t. \qquad (27)$$

Сравнивая между собой кинематические параметры катящегося по наклонной плоскости колеса (13), (15) и (26), (27), найденные с помощью уравнений движения материального тела и теоремы об изменении кинетической энергии, видно, что они полностью совпадают между собой. Это свидетельствует о правильности следствий и теорем, полученных в [9] и [10].

Модифицированное уравнение Лагранжа II рода

Для частного случая движения механической системы, когда m = const, I = const и при скоростях тел, не зависящих от обобщенных координат, в [10] были получены уравнения, которые имеют следующий вид

$$m_{\text{пр}i}\cdot u_i=Q_i, \qquad (28)$$

где $m_{\text{пр}i}$ — приведенная масса i-го тела; Q_i — обобщенная сила; u_i — соответствующее движению ускорение; $u_i=a$ и $u_i=\varepsilon$ при поступательном и вращательном движении, соответственно.

Применим (28) для исследования качения колеса по наклонной плоскости (рис. 1).
Найдем скорость и перемещение центра колеса C.
Движение точки C колеса в соответствии с (28), примет вид

$$m_{\text{пр}}\cdot a_C=Q, \qquad (29)$$

где $m_{\text{пр}}$ — приведенная масса колеса; $a_C=\dfrac{dV}{dt}$ — ускорение центра колеса; $Q=\dfrac{\delta A}{\delta x}$ — обобщенная сила.

Найдем приведенную массу колеса и действующую на него обобщенную силу.

Приведенная масса определится из кинетической энергии колеса, которую в соответствии с (19) можно представить в виде

$$T_1=\frac{m_{пр}\cdot V^2}{2}. \qquad (30)$$

Тогда из (19) и (30) следует, что приведенная масса колеса определится как

$$m_{пр} = 2m. \quad (31)$$

Для определения обобщенной силы, сообщим колесу виртуальное перемещение δx.

Тогда работа колеса на виртуальном перемещении в соответствии с (21) определится

$$\delta A = m \cdot g \cdot (\delta x \cdot \sin\alpha - \mu \cdot \delta\varphi \cdot \cos\alpha). \quad (32)$$

Связь между линейным и угловым виртуальными перемещениями колеса имеет вид

$$\delta\varphi = \frac{\delta x}{r}. \quad (33)$$

С учетом (33), найдем работу (32) колеса на виртуальном перемещении

$$\delta A = m \cdot g \cdot \delta x \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right). \quad (34)$$

Обобщенная сила Q, действующая на колесо, определится

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x} = m \cdot g \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right). \quad (35)$$

Подставив в (29) приведенную массу колеса (31) и обобщенную силу (35), после ряда преобразований получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{2}. \quad (35)$$

Видно, что дифференциальное уравнение качения по наклонной плоскости колеса, полученное с помощью модифицированного уравнения Лагранжа II рода, полностью совпадает с ранее полученным уравнением (12). Следовательно, предложенное в [10] это модифицированное уравнение является корректным и поэтому может быть рекомендовано для практического применения.

Теорема об изменении соэнергии

В [10] доказана теорема об изменении соэнергии материального тела, которая утверждает, что изменение соэнергии тела при его поступательном и вращательном движении равно соответствующему главному вектору силового импульса, который воздействовал ни него в этот промежуток времени.

Математическая запись этой теоремы имеет следующий вид

$$\begin{cases} \overline{K}_{n2} - \overline{K}_{n1} = \overline{S}_F; \\ \overline{K}_{в2} - \overline{K}_{в1} = \overline{S}_M. \end{cases} \quad (36)$$

где $\overline{S}_F$ и $\overline{S}_M$, соответственно, главный вектор импульса силы и момента силы; $\overline{K}_{n1}$, $\overline{K}_{n2}$, $\overline{K}_{в1}$, $\overline{K}_{в2}$ — соответственно, соэнергии тела в начальный t_1 и конечный t_2 момент времени при его поступательном и вращательном движении.

При начальных условиях $t = 0; V_0 = 0; x_0 = 0; \varphi_0 = 0; \omega_0 = 0$ соэнергии $\overline{K}_{в1}$, $\overline{K}_{в2}$ колеса при его поступательном и вращательном движении будут равны нулю, то есть

$$\begin{cases} \overline{K}_{n1} = 0; \\ \overline{K}_{в1} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

С учетом (37) система уравнений (36) примет вид

$$\begin{cases} \overline{K}_{n2} = \overline{S}_F; \\ \overline{K}_{в2} = \overline{S}_M. \end{cases} \tag{38}$$

Спроецируем (38) на координатные оси x и y и учитывая, что $K_n = m \cdot V$, а $K_в = I \cdot \omega$, в результате получим

$$\begin{cases} m \cdot V = S_F; \\ I \cdot \omega = S_M. \end{cases} \tag{39}$$

Найдем импульсы силы и момента силы. Для нахождения импульсов воспользуемся формулами (4) и (7). В результате получим

$$\begin{cases} S_F = m \cdot g \cdot \sin\alpha t; \\ S_M = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha t. \end{cases} \tag{40}$$

Подставив (40) в систему уравнений (39) и учитывая (8) и (10), после ряда преобразований получим

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = g \cdot \sin\alpha; \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot g \cdot \cos\alpha}{r}. \end{cases} \tag{41}$$

Видно, что система уравнений (41) полностью аналогична системе уравнений (11). Следовательно, сформулированная в [10] теорема является правильной и поэтому она может быть рекомендована для практического применения.

Принцип кинетостатики

В [10] было установлено, что в каждый момент времени действующие на свободно движущееся материальное тело внешние и инерционные силы и моменты сил образуют уравновешенную (статическую) систему сил и моментов.

Тогда система уравнений кинетостатики для материальных тел имеет следующий вид

$$\begin{cases} \overline{F} + \overline{\Phi} = 0; \\ \overline{M} + \overline{M}_Ф = 0, \end{cases} \tag{42}$$

где $\overline{\Phi}$ и $\overline{M}_Ф$ — сила инерции и момент сил инерции, которые определяются следующим образом

$$\begin{cases} \overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a}; \\ \overline{M}_Ф = -I \cdot \overline{\varepsilon}. \end{cases} \tag{43}$$

Знак минус в (43) указывает на то, что сила инерции и момент сил инерции направлены противоположно соответствующим ускорениям.

Исследуем движение колеса по наклонной плоскости с помощью уравнений кинетостатики (42).

Найдем модули силы и момента силы инерции (рис.1), которые действуют на колесо, для чего подставим в (43) формулы (8). После небольших преобразований получим

$$\begin{cases} \Phi = m \cdot \dfrac{dV}{dt}; \\ M_Ф = m \cdot r^2 \cdot \dfrac{d\omega}{dt}. \end{cases} \tag{44}$$

Спроецировав систему уравнений (42) на оси x и y и после подстановки в (42) уравнений (4), (7) и (44) получим

$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \sin\alpha - m \cdot \dfrac{dV}{dt} = 0; \\ -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - m \cdot r^2 \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

После преобразования уравнений (44) с учетом формулы (10), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = g \cdot \sin\alpha; \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot g \cdot \cos\alpha}{r}. \end{cases} \tag{46}$$

Видно, что система уравнений (46) полностью аналогична системе уравнений (11). Следовательно, сформулированный в [10] принцип кинетостатики может быть рекомендован для практического применения.

Общее уравнение динамики

В [10] на базе новых аксиом и следствий движения материальных объектов природы получено общее уравнение динамики, которое имеет вид

$$\sum \delta A + \sum \delta A_{\Phi} = 0\,, \tag{47}$$

где δA — работа активных сил и моментов сил на виртуальном перемещении; δA_{Φ} — работа сил инерции и моментов сил инерции на виртуальном перемещении.

Из (46) следует, что сумма работ активных и инерционных сил и моментов сил на возможном перемещении равна нулю.

Исследуем движение колеса по наклонной плоскости с помощью общего уравнения динамики (46). Для чего сообщим колесу (рис. 1) виртуальное перемещение (на рис.1 виртуальные перемещения не показаны.)

Найдем

$$\sum \delta A_{\Phi} = m \cdot \frac{dV}{dt} \cdot \delta x + m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \delta\varphi\,. \tag{48}$$

С учетом формул (45) работа (48) сил инерции и моментов сил инерции на виртуальном перемещении колеса определится

$$\sum \delta A_{\Phi} = m \cdot \left(\frac{dV}{dt} + r \cdot \frac{d\omega}{dt} \right) \cdot \delta x\,. \tag{49}$$

Подставив в общее уравнение динамики (47) равенства (34) и (48) и учитывая, что $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dV}{dt}$, после преобразований получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g\left(\sin\alpha - \dfrac{\mu}{r} \cdot \cos\alpha \right)}{2}\,. \tag{50}$$

Видно, что дифференциальное уравнение (49) полностью совпадает с дифференциальным уравнением уравнений (12), полученным в результате использования новых уравнений движения материальных тел. Следовательно, выведенное в [10] общее уравнение динамики может быть рекомендовано для практического применения.

Выводы

Применение полученных ранее новых аксиом, принципов, следствий, теорем и уравнений движения материальных объектов природы для исследования качения твердого колеса (материального тела), дали одинаковые результаты. Следовательно, они адекватны реальным объектам и поэтому их можно рекомендовать для практического применения.

Литература:

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М. : Наука, 1989. – 688 с.
2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2000. – 720 с.
3. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. – Киев : Наук. Думка, 1989. – 864 с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с.
5. Кухлинг Х. Справочник по физике. – Перевод с нем. – М. : МИР, 1983. – 520 с.
6. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 1. С. 21–25.
7. Смелягин А.И. Аксиомы или законы движения сформулировал И. Ньютон // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 11–16.
8. Смелягин А.И. Основные, первичные понятия механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 2. – С. 17–26.
9. Смелягин А.И. Аксиомы движения материальных тел // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 3. – С. 19–34.
10. Смелягин А.И. Теоремы, принципы и уравнения механики // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). – 2014. – № 4. – С. 21–29.

References:

1. Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural filosofii. – M. : Nauka, 1989. – 688 p.
2. Golubev Y.F. Basics of theoretical mechanics. 2nd ed. – M. : MGU, 2000. – 720 p.
3. Kuz'michev V.E. Laws and formulas of physics. – Kiev : Science Dumka, 1989. – 864 p.
4. N. Nikitin. Course of theoretical mechanics. – M. : Higher. sh., 1990. – 607 p.
5. Kuhling H. Handbook of physics. – Translated from the German. – M. : Mir, 1983. – 520 p.
6. Smelyagin A.I. Objects for which the axioms or laws of classical mechanics. // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 1. – P. 21–25.
7. Smelyagin A.I. Axioms or laws of motion formulated by Newton // Science Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 11–16.
8. Smelyagin A.I. Basic, primary concepts of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 2. – P. 17–26.
9. Smelyagin A.I. The axioms of motion of material bodies // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 3. – P. 19–34.
10. Smelyagin A.I. Theorems, principles and equations of mechanics // Science. Engineering. Technology (polytechnical bulletin). – 2014. – № 4. – P. 21–29.