УДК 528.14

# ОЦЕНКА НЕРАВНОЗНАЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

––––––––

# EVALUATION MEASUREMENT NONEQUIVALENCE THE ADJUSTMENT METHOD OF LEAST SQUARES

**Желтко Чеслав Николаевич**
кандидат технических наук,
доцент кафедры кадастра и геоинженерии
Кубанского государственного
технологического университета
Тел.: 8 (918) 499-09-39
set@id-yug.com

**Zheltko Cheslav Nikolaevich**
Ph.D., Associate Professor of
the Department of Cadastre
and Geo-engineering Kuban State
University of Technology
Tel.: 8 (918) 499-09-39
set@id-yug.com

**Бердзенишвили Сергей Георгиевич**
доцент кафедры кадастра и геоинженерии
Кубанского государственного
технологического университета
Тел.: 8 (918) 314-77-44

**Berdzenishvili Sergey Georgievich**
Associate Professor of the Department of
Cadastre and Geo-engineering
Kuban State University of Technology
Tel.: 8 (918) 314-77-44

**Олейникова Лилия Альбертовна**
старший преподаватель
кафедры кадастра и геоинженерии
Кубанского государственного
технологического университета
Тел.: 8 (952) 875-31-19

**Oleynikova Liliya Albertovna**
senior Lecturer of the Department of
cadastre and Geo-engineering
Kuban State University of Technology
Tel.: 8 (952) 875-31-19

**Аннотация.** Анализируется в общем виде степень участия каждого измерения в уравненных значениях неизвестных. На основе анализа приведен пример методики, в которой нарушены выгоднейшие условия измерений.

**Annotation.** Analyzed in a general way the degree of participation of each measurement in the adjusted values of the variables. On the basis of analysis is an example of a technique which violated Favorable conditions for measurements.

**Ключевые слова:** уравнивание. Неизвестные. Метод наименьших квадратов. Значимость и весомость измерения.

**Keywords:** adjustment. Variables. The method of least squares. Importance and availability of weight measurements.

При уравнивании результатов измерений методом наименьших квадратов подставляют в известные формулы измеренные величины. При необходимости учитывают их веса. Реже учитывают коррелируемость измерений между собой. Однако практически никогда не анализируют такую характеристику измерения как степень участия каждого измерения в выводе уравненного значения неизвестного. Ясно, что разные измерения оказывают разное влияние на уравненные величины. В [1] сформулированы понятия значимости и весомости измерения. Рассмотрим их более детально.

Значимость измерения с номером $i$ выразим числом $\Delta x_{i,j}$, на которое изменится величина неизвестного с номером $j$, если свободный член $l_i$ уравнения поправок параметрического способа уравнивания уменьшить на 1. Будем для простоты рассматривать равноточные и некоррелируемые измерения.

Так как зависимость $x_j$ от $l_i$ линейна, то $\Delta x_{i,j}$, не зависит от $l_i$. Любое $x_j$ равно 0, если все $n$ значений $l_i$ равны 0. Поэтому для $j$-го неизвестного будем иметь

$$x_j = -\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_{i,j} \cdot l_i\right) = -\left[\Delta x_j \cdot l\right]. \qquad (1)$$

Формула тождественна формуле вычисления неизвестных с помощью элементов псевдообратной матрицы $A^+$ по отношению к матрице $A$ коэффициентов уравнений поправок. Примем только размер этой матрицы таким же $n \times k$, как и матрицы $A$, в отличие от общепринятого размера $k \times n$ ($k$ – число неизвестных). Отсюда следует, что значимость измерения равна соответствующему элементу матрицы $A^+$.

Заметим, что для случая $n > k$ эту единственную матрицу $A^+$ можно найти из $A$ линейной комбинацией её столбцов при условии

$$A^T A^+ = E\,, \tag{2}$$

где $E$ – единичная матрица.

И действительно, число условий (элементов) $k^2$, которое даёт матрица $E$, равно числу коэффициентов, на которые нужно перемножить $k$ столбцов $A$ для получения $k$ столбцов $A^+$.

Установим понятие весомости $\Delta P_{i,j}$ измерения как долю веса $P_j$ неизвестного, дающую это измерение. Причём сумма весомостей для всех измерений равна весу неизвестного

$$P_j = \left[\Delta P_j\right]. \tag{3}$$

Обратный вес неизвестного $x_j$ можно найти по формуле средней квадратической погрешности функции измеренных величин как сумму квадратов коэффициентов в (1). Отсюда будем иметь

$$\frac{1}{P_j} = \left[\Delta x_j^2\right]. \tag{4}$$

Умножив числитель и знаменатель левой части равенства на $P_j$

$$\frac{\left[\Delta P_j\right]}{P_j^2} = \left[\Delta x_j^2\right], \tag{5}$$

получим для отдельного слагаемого с индексом $i$

$$\Delta P_{i,j} = \Delta x_{i,j}^2 \cdot P_j^2 = \frac{\Delta x_{i,j}^2}{\left[\Delta x_j^2\right]^2}\,. \tag{6}$$

Или обратный переход

$$\Delta x_{i,j} = \frac{\sqrt{\Delta P_{i,j}}}{P_j}\,. \tag{7}$$

Условимся для однозначности считать знак величины $\sqrt{\Delta P_{i,j}}$, совпадающим со знаком $\Delta x_{i,j}$.

По (6) можно вычислять весомости измерений, если их обработка производится обращением матрицы $A$. Если обращают матрицу нормальных уравнений $N$, то можно воспользоваться формулой

$$A^+ = AN^{-1}. \tag{8}$$

Формулу (4) тоже можно написать в матричной форме

$$Q_j = \left(A^+\right)^T A^+. \tag{9}$$

Подобную формулу с учётом весов измерений авторы [2] используют для оценки точности неизвестных на основе численного дифференцирования

$$Q = fQ_\beta f^T, \tag{10}$$

где $f$ – матрица размером $k \times n$ частных производных функции неизвестных по измеренным аргументам (величинам), $Q_\beta$ – матрица весов измерений.

Частные производные функции неизвестных по измеренным аргументам (величинам) легко отыскиваются на ЭВМ. Для этого последовательно измеренные величины увеличивают на малую величину $\Delta l$, находят изменения вычисленных неизвестных $\Delta x$ и по ним вычисляют производные

$$f_{i,j} = \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta l}. \tag{11}$$

Для функции уравненных значений неизвестных

$$F = q_1 x_1 + q_2 x_2 + ... + q_k x_k \tag{12}$$

значимости $\Delta F_i$ можно найти по формуле

$$\Delta F = A^+ q, \tag{13}$$

где $\Delta F$ и $q$ – векторы-столбцы размеров $n$ и $k$ соответственно.

Отсюда находят и весомости измерений по (6). Вообще функцию $F$ можно всегда подставить в уравнения поправок вместо любого неизвестного, например вспомогательного, и найти весомости для неё как для одного из неизвестных.

Приведём пример. Известна методика определения астрономического азимута по наблюдениям звёзд в меридиане для создания высокоточных эталонных направлений. В методике измеряют горизонтальные углы между звёздами вблизи меридиана и создаваемым эталонным направлением. Точно фиксируется время наведения на звезду. Звёзды выбирают на севере и юге на зенитных расстояниях от 20° до 80°. Измерения азимута выполняют в прямом и обратном направлениях. Обработку ведут методом наименьших квадратов. Единицей измерения служит азимут искомого направления, вычисленный по одной звезде. При уравнивании находят вначале вспомогательные величины: условные прямой и обратный азимуты, уклонения отвесной линии, по которым затем определяют одно основное неизвестное – прямой астрономический азимут.

В своё время у первого автора этой статьи появились сомнения в соблюдении выгоднейших условий наблюдений в данной методике. При анализе её и родились понятия значимости и весомости измерения. Для функции $F$ уравненных значений неизвестных, которой является прямой астрономический азимут, выведены формулы для весомостей измерений в общем виде:

– для прямого азимута

$$\Delta F_1 = \left( \frac{2}{1+4\mathrm{tg}^2\varphi} \sin z_i + \frac{4\mathrm{tg}\varphi}{1+4\mathrm{tg}^2\varphi} \cos z_i \right)^2; \tag{14}$$

– для обратного азимута

$$\Delta F_2 = \left( \frac{2}{1+4\mathrm{tg}^2\varphi} \sin z_i \right)^2, \tag{15}$$

где $\varphi$ – широта, $z$ – зенитное расстояние звезды. Для южных звёзд зенитные расстояния отрицательны.

На рисунке 1 приведены графики весомостей в зависимости от зенитных расстояний звёзд для широты $\varphi = 55^\circ$. Используемые диапазоны зенитных расстояний выделены серым.

Из графиков видно, что южные звёзды дают небольшой вклад в конечный результат. Есть даже «холостые» измерения, имеющие нулевые весомости (в прямом азимуте при $z = -70° \div -80°$). С другой стороны не наблюдаются близзенитные звёзды в прямом азимуте, которые могли бы дать максимальные весомости. Обратный азимут, хотя определяется по такой же методике, как и прямой, в функции $F$ практически не содержится, хотя оба азимута уравниваются по формуле Лапласа. Отсюда видим, что в методике не соблюдаются выгоднейшие условия измерений.

Есть примеры и других методик измерений, которые проанализированы авторами статьи, где тоже нарушаются выгоднейшие условия измерений.

Предлагаемый анализ по значимости или весомости измерения может служить достаточно полезным инструментом для поиска выгоднейших условий в различных методиках, схемах измерений и оценки вклада каждого измерения в выводе уравненного значения неизвестных.

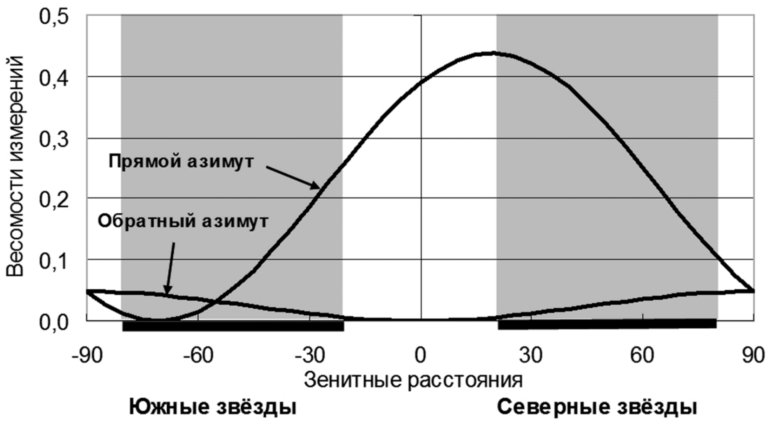


**Рисунок 1 – Графики весомостей измерений**

### Литература:

1. Желтко Ч.Н. Значимость и весомость измерений в методе наименьших квадратов. Геодезия и аэрофотосъёмка : Сборник научных трудов. – Ростов н/Д. : Рост. инж.-строит. ин-т, 1990. – С. 128–135.

2. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений : учебное пособие для вузов. 2010. – 247 с.

### References:

1. Zheltko Ch.N. Importance and availability of weight measurements in the least squares method. Geodesy and aerial photography : Collection of scientific papers. – Rostov on Don : Rost. engineer-building. Inst., 1990. – P. 128–135.

2. Marcuse U.I., Golubev V.V. The theory of mathematical processing geodesics measurements : textbook for universities. 2010. – 247 p.