УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ СДВИГА ФАЗ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

–––––––

THE EFFECT OF PHASE SHIFT PERTURBATIONS ON THE FORCED VIBRATIONS OF RODS

Алокова Мадина Хасановна
Губжокова Залина Аслановна
магистранты II года обучения по направлению «Математическая физика», Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова
Тел.: 8(928) 717-23-87, 8(938) 913-47-36
set@id-yug.com

Alokova Madina Hasanovna
Gubzokova Zalina Aslanovna
II graduate year of study in "Mathematical Physics",
Kabardino-Balkar State University
Тел.: 8(928) 717-23-87, 8(938) 913-47-36
set@id-yug.com

Аннотация. Рассматривается задача о вынужденных установившихся колебаниях при гармонических возмущениях стержня переменного сечения, описываемых неоднородным дифференциальным уравнением четвёртого порядка в частных производных. Методом конечных разностей проблема определения амплитуды вынужденных колебаний сводится к решению системы алгебраических уравнений. Приведён численный пример определения влияния сдвига фаз возмущений на вынужденные колебания стержней.

Ключевые слова: вынужденные колебания упругих систем, амплитуда вынужденных колебаний, сдвиг фаз возмущений.

Annotation. The problem of forced steady oscillations with harmonic disturbances rod of variable cross-described non-homogeneous differential equation of the fourth order partial derivatives. The finite difference method the problem of determining the amplitude of the forced vibration is reduced to solving a system of algebraic equations. A numerical example of determining the effect of phase shift perturbations on the forced vibrations of rods.

Keywords: forced vibrations of elastic systems, the amplitude of the forced oscillation phase shift perturbations.

В 1928 г. известный русский механик С.П. Тимошенко в предисловии к своей книге «Колебания в инженерном деле» писал: «С увеличением размеров и скоростей современных машин в инженерных расчётах становится всё более и более важным решение задач, связанных с колебаниями». За истекшие годы значение теории колебаний приобрело еще большее значение в связи с бурным ростом мощностей машин, скоростей движения, появлением новых типов конструкций, обеспечением устойчивости и управляемости [1, 2]. Хотя задачи о вынужденных колебаниях упругих систем, возбуждаемых периодическими силами, относятся к сравнительно разработанным разделам теории колебаний [3, 4], колебания балок переменного сечения, в частности влияние на них сдвига фаз возмущений, изучено слабо.

Часто изучение колебаний балок существенно усложняется по разным причинам: материал балки неоднородный, поперечное сечение переменное вдоль оси, балка несёт неравномерно распределённую массу и т.д. В таких задачах применение аналитических методов, например, при определении амплитудно-частотных характеристик, встречает серьёзные затруднения. Выход из них состоит в использовании численных методов [5].

Колеблющаяся балка переменного сечения растянута (или сжата) силой P (рис. 1), постоянной по величине. Действуют равномерно распределённая поперечная нагрузка $f_1(t)$ (динамическое возмущение) и перемещения правого конца $f_2(t)$ (кинематическое возмущение).

Процедура вывода уравнения колебаний в рамках технической теории изгиба стержней в данной задаче приводит к дифференциальному уравнению в частных производных четвёртого порядка гиперболического типа

$$\left(b(x)u''\right)'' - Pu'' + m(x)\ddot{u} + \eta m(x)\dot{u} = f_1(x,t), \qquad x \in (0,\, l), \quad t > -\infty\,, \tag{1}$$

где принятые традиционные обозначения: $u(x,t)$ – функция отклонений стержня при колебаниях, η – удельный коэффициент линейно-вязких сил сопротивления, $b(x)$, $m(x)$ – изгибная жёсткость, погонная масса, переменные по длине стержня.

Рассмотрим задачу о вынужденных установившихся колебаниях (рис. 1) при гармонических возмущениях $f_1(t)$ и $f_2(t)$. К уравнению (1) необходимо добавить дополнительные условия: начальные, граничные. В виду того, что изучаются установившиеся колебания, начальные условия не потребуются. По терминологии [6] такие задачи называются «задачами без начальных условий». Например, для шарнирного опирания концов, показанных здесь, граничные условия примут вид

$$u(0,t) = 0, \quad u''(0,t) = 0, \quad u(l,t) = f_2(t), \quad u''(l,t) = 0, \quad t > -\infty\,. \tag{2}$$

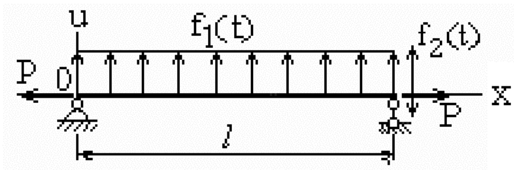

Рисунок 1

Два возмущения образуют векторный гармонический процесс $\mathbf{f}(t) = \{f_1(t),\ f_2(t)\}$, компоненты которого имеют частоты Ω_k и начальные фазы ψ_k. Их удобно представлять как комплекснозначные функции

$$f_k(t) = a_k e^{i(\Omega_k t + \psi_k)}, \qquad k = 1,\ldots,5. \tag{3}$$

Введём обозначение для комплексной амплитуды

$$A_k = a_k e^{i\psi_k}\,.$$

Здесь a_k – вещественная амплитуда гармонических возмущений. Упростим описание возмущений

$$f_k(t) = A_k e^{i\Omega_k t}, \qquad k = 1,\, 2. \tag{4}$$

Выходной процесс $u(x,\,t)$ будет суммой двух гармоник с разными частотами Ω_k. Периодическими такие колебания будут лишь в том случае, если отношения Ω_j / Ω_k окажутся рациональными числами. Если обе частоты возмущений одинаковые, т.е. $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, то выходной процесс будет гармоническим. Для этой задачи можно определять и амплитуду колебаний.

Решение задачи (2), (3) ищется с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u(x,t) = X(x)e^{\lambda t}\,, \tag{5}$$

где $\lambda = j\Omega$ – характеристический показатель, $X(x)$ – функция амплитуды вынужденных колебаний, подлежащая определению.

Обозначим $a = \lambda m(\lambda + \eta)$, подставим (5) в (2), (3) и получим

$$\left(bX''\right)'' - PX'' + aX = A_1, \qquad x \in (0,\, l), \tag{6}$$

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \qquad X(l) = A_2, \qquad X''(l) = 0, \tag{7}$$

На первом этапе решения перепишем уравнение (6) в виде

$$\frac{(bX'')_{i-1} - 2(bX'')_i + (bX'')_{i+1}}{h^2} - PX_i'' + c_i X_i = A_1, \qquad i = 3,\ 4, \ldots, n-2. \tag{8}$$

После несложных преобразований (8) примет вид

$$(bX'')_{i-1} - \left(2b_i + Ph^2\right) X_i'' + (bX'')_{i+1} + c_i h^2 X_i = h^2 A_1. \tag{9}$$

Здесь

$$b_i = b(x_i), \qquad c_i = c(x_i), \qquad X_i = X(x_i)\,.$$

При переходе к методу конечных разностей далее непрерывная функция $X(x)$ будет представляться вектором (сеточной функцией) $\boldsymbol{Y} = \{y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n\}^T$ (рис. 2).

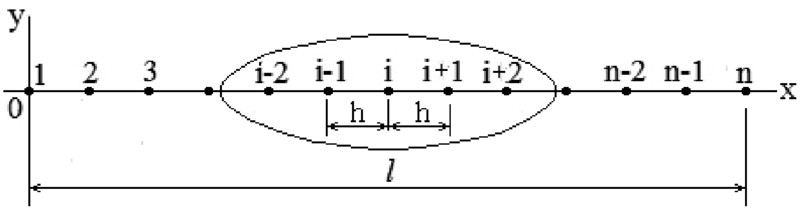

Рисунок 2

Выполнив необходимые процедуры метода, вместо (9) запишем

$$\begin{gathered} b_{i-1}y_{i-2} + \alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} + b_{i+1}y_{i+2} = A_h, \\ \alpha_i = -2b_{i-1} - 2b_i - Ph^2, \quad \beta_i = b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1} + 2Ph^2 + c_i h^4, \\ \gamma_i = -2b_i - 2b_{i+1} - Ph^2, \quad A_h = h^4 A_1,\ i = 3,\ 4, \ldots, n-2. \end{gathered} \tag{10}$$

Граничные условия (7) приведём в соответствие с методом конечных разностей и запишем:

– на левом конце:

$$y_1 = 0, \qquad 2y_1 - 5y_2 + 4y_3 - y_4 = 0\ ; \tag{11}$$

– на правом конце:

$$y_n = A_2, \qquad -y_{n-3} + 4_{n-2} - 5y_{n-1} + 2y_n = 0\,. \tag{12}$$

Уравнения (10)–(12) образуют однородную алгебраическую систему, которую можно переписать в матрично-векторной форме

$$G(\lambda)\ Y = Q, \tag{13}$$

где $G(\lambda)$ – квадратная матрица порядка n. Можно легко показать, что уравнение (13) в координатной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \vdots & & & & & \\ 2 & -5 & 4 & -1 & & & \vdots & & & & & \\ b_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & b_4 & & \vdots & & & & & \\ & b_3 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & b_5 & \vdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \vdots & b_{n-3} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \gamma_{n-2} & b_{n-1} \\ & & & & & & \vdots & & -1 & 4 & -5 & 2 \\ & & & & & & \vdots & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \cdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_h \\ A_h \\ \cdots \\ A_h \\ 0 \\ A_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь нулевые элементы не выписаны. Решение системы уравнений (13) даёт вектор $Y = G^{-1}\,Q$, а далее и вектор амплитуд колебаний по формуле

$$a_u(x_i) = |Y|. \qquad (15)$$

Традиционно в таких задачах изучается, как наиболее важная, проблема зависимости перемещений u от частоты возмущений Ω [8] (в частности, резонансные явления). В то же время сдвиг начальных фаз возмущений может оказать существенное влияние на амплитуду колебаний, а далее и на напряжённо-деформированное состояние внутри стержня и прочность. Рассмотрим пример.

Пример. Шарнирно опертый стержень и разностная схема имеют параметры:

$$l = 3 \ \text{м}, \quad n = 1001, \quad m(x) = 10 + 0{,}5x^2 \ \text{кг/м},$$

$$b(x) = 80 + 10x \ \text{Нм}^2, \quad \eta = 0{,}01 \ c^{-1}, \quad \Omega = 3 \ c^{-1}, \quad P = 200 \ H.$$

Изучим влияние начальных фаз (сдвига фаз) ψ на амплитуду колебаний. В такой задаче существенное значение будут иметь не величины начальных фаз, а разницы между ними (сдвиги фаз). Наиболее характерными будут три случая:

$$\Psi = \left[(0,\ 0); \quad (0,\ \pi); \quad (0,\ \pi/2)\right].$$

Первый из них соответствует синфазным возмущениям, при этом возмущения направлены в одну и ту же сторону, одновременно увеличиваются (уменьшаются). Во втором случае возмущения противоположно направлены, третий случай является промежуточным между двумя предыдущими, что и отразилось на результатах вычислений.

Результаты счёта по компьютерной программе представлены на рис. 3. Как и следовало ожидать, первый случай сдвига фаз (кривая 1) даёт наибольшие отклонения, второй – наименьшие, а третий – промежуточные между ними. В данном случае частота возмущений меньше первого собственного значения, определяемого по [7], поэтому распределение амплитуд имеет форму первой собственной функции.

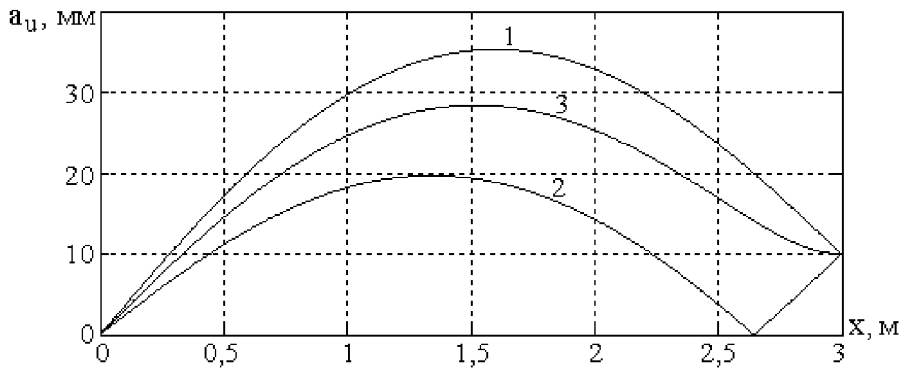

Рисунок 3

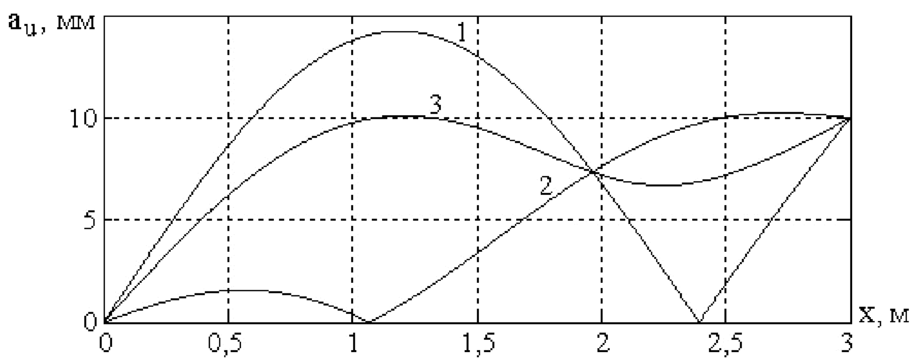

Рисунок 4

Если принять, $\Omega = 10$ с$^{-1}$, т.е. частота возмущений находится по величине между первой и второй собственными частотами, то картина усложняется (рис. 4). В формировании характера распределения амплитуд участвуют первая и вторая собственные функции.

На основании проведённых выше вычислений можно сделать вывод, что в гармонических колебаниях стержней сдвиг фаз компонентов векторных возмущений существенно влияет на величину и форму распределения амплитуд.

Литература:

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М. : Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Вайнберг Д.В. Механические колебания и их роль в технике. – М., 1958.
3. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю., Барагунов Т.М. Вынужденные колебания континуально-дискретной многопролётной балки при учёте инерционных сил вращения // Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. Вып. 26(45). – Волгоград, 2012. – С. 48–55.
4. Культербаев Х.П., Казиев А.М. О гармонических колебаниях балок, возбуждаемых векторными возмущениями // Лёгкие строительные конструкции. – Ростов н/Д. : Рост. гос. строит. ун-т, 2003. – С. 146–154.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики : Учебник. 7-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.
7. Алокова М.Х., Дадова М.Х. Определение собственных значений в задаче о колебаниях стержня методом конечных разностей: Материалы международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. «Перспектива-2012». Том III. – Нальчик, 2012. – С. 206–209.
8. Алокова М.Х. Материалы международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. «Перспектива-2013». Технические науки. Том IV. – Нальчик, 2013. – С. 3–7.

References:

1. Babakov I.M. Theory of oscillations. – M. : Bustard, 2004. – 591 p.
2. Weinberg D.V. Mechanical vibrations and their role in technology. – M., 1958.
3. Kulterbaev Kh.P., Chechenov T.J., Baragunov T.M. Forced vibrations of continuous-discrete multiple-span beam, taking into account the inertial forces of revolution // Herald VolgGASU. Series: Construction and architecture. MY. 26 (45). – Volgograd, 2012. – P. 48–55.
4. Kulterbaev Kh.P., Kaziev A.M. Harmonic vibrations of beams excited vector perturbations / / Lightweight construction construc-struction. – Rostov n/D. : Height. State. builds. University Press, 2003. – P. 146–154.
5. Wierzbicki V.M. Fundamentals of numerical methods. – M. : Higher School, 2002. – 840.
6. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. The equations of mathematical physics textbook. 7th ed. – M. : Moscow State University Press, 2004. – 798 p.
7. Alokova M.H., Dadova M.H. Determination of the eigenvalues of the problem of vibrations of the rod by the finite difference: Proceedings of the International scientific conference of students and young scientists. "Vision for 2012". Volume III. – Nalchik, 2012. – P. 206–209.
8. Alokova M.H. Proceedings of the International Conference of Students and Young Scientists. "Perspective 2013". Technical science. Volume IV. – Nalchik, 2013. P. 3–7.