

УДК 539.3

**Губжокова Залина Аслановна,
Алокова Мадина Хасановна**

магистранты I года обучения по направлению
«Математическая физика», Кабардино-Балкарского
государственного университета им. Х.М. Бербекова
set@id-yug.com

**Gubzokova Zalina Aslanovna,
Alokova Madina Hasanovna**
I Graduate year of study in "Mathematical
Physics", Kabardino-Balkar State
University
set@id-yug.com

Аннотация. В данной статье рассматривается задача об устойчивости многопролётного стержня переменного сечения, описываемого однородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Методом конечных разностей проблема определения критических сил сводится к решению характеристического алгебраического уравнения, которая решается с большой точностью графоаналитическим способом на компьютере. Приведён численный пример определения критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости.

Annotation. In this article the problem of the stability of multispan rod of variable cross-section, described by a homogeneous system of ordinary differential equations of fourth order. The finite difference method the problem of determining the critical forces reduced to the solution of the characteristic of an algebraic equation, which is solved with high precision semi-graphical way on your computer. A numerical example of the determination of critical power and corresponding buckling.

Ключевые слова: устойчивость многоопорных стержней, устойчивость стержней переменного сечения, метод конечных разностей, критическая сила.

Keywords: multisupporting resistance rods, resistance rods of variable cross section, finite difference method, the critical force.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПРОЛЁТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ



ON THE STABILITY OF MULTI-SPAN RODS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Решение задачи об устойчивости сжатых стержней в неклассических случаях (многопролётность, переменное сечение и т.д.) представляет значительные сложности, так как зачастую не удаётся установить спектры собственных значений и форм аналитическими методами. Выход из такого затруднения состоит в применении численных и других приближённых методов [1–3].

Рассматривается многопролётный стержень (рис. 1) переменного сечения с пролётами l_j , имеющими разные модули Юнга E_j и моменты инерции сечений J_j ($j = 1, 2 \dots n$). В продольном направлении действует осевая сжимающая сила F . Далее задача состоит в том, чтобы найти спектры собственных значений (критические силы) F_k $k = 1, 2, \dots$ и собственных форм.

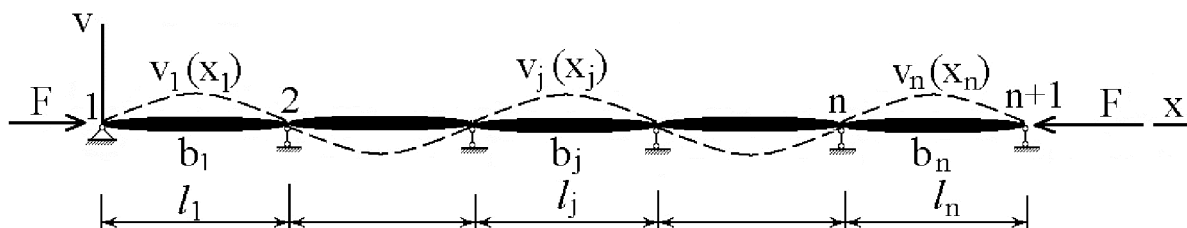


Рис. 1

При постановке задачи, указанной выше, изогнутая ось сжатого стержня при эйлеровой форме потери устойчивости описывается для каждого j -го пролёта обыкновенным дифференциальным уравнением четвёртого порядка

$$(b_j v_j''')' + F v_j'' = 0, \quad x_j \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $b_j(x_j) = E I_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ – функции прогибов; x_j – локальные координаты j -го пролёта с началом, совпадающим с левым концом пролёта; штрихи в верхних индексах соответствуют дифференцированию по пространственной координате. Будем искать спектр собственных значений уравнения (1), при которых возможны нетривиальные решения

$$v_j(x)_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнение (1) дополняется граничными условиями и условиями сопряжения пролётов. Шарнирное опирание концов стержня даёт

$$v_1(0) = 0, \quad v_1''(0) = 0, \quad v_n(l_n) = 0, \quad v_n''(l_n) = 0. \quad (2)$$

Условия сопряжения состоят в том, что слева и справа от промежуточных опор перемещения равны нулю. Здесь же вследствие непрерывности строения стержня углы поворота сечений и изгибающие моменты равны между собой

$$\begin{aligned} v_j(l_j) = 0, \quad v_{j+1}(0) = 0, \quad v_j'(l_j) = v_{j+1}'(0), \\ b_j v_j''(l_j) = b_{j+1} v_{j+1}''(0), \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналитическое определение собственных значений задачи (1)–(3) возможно лишь в весьма простых частных случаях. Поэтому далее воспользуемся методом конечных разностей. Заменим в (1) область непрерывного изменения аргумента областью дискретного изменения. Обозначим $L = \sum_{j=1}^n l_j$ и разобьём отрезок $[0, L]$ на N_0 равных частей. Введём на этом отрезке сетку с шагом $h = L / N_0$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, N_0 + 1\}.$$

Добавим в неё дополнительные узловые точки над каждой опорой, используемые в условиях сопряжения двух соседних пролетов. Вместо функций $v_j(x_j)$ будем рассматривать сеточную функцию $y(x_i)$. Далее от дифференциальных операторов перейдем к разностным операторам и запишем вместо (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^4} [b_{i-1} y_{i-2} - 2(b_{i-1} + b_i) y_{i-1} + (b_{i-1} + 4b_i + b_{i+1}) y_i - 2(b_i + b_{i+1}) y_{i+1} + \\ + b_{i+1} y_{i+2}] + \frac{F}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = 0. \end{aligned}$$

Выразим также производные в (2), (3) через значения функции $y(x_i)$ в узловых точках

$$\begin{aligned} y_1'' = \frac{1}{h^2} (2y_1 - 5y_2 + 4y_3 - y_4), \quad y_N'' = \frac{1}{h^2} (-y_{N-3} + 4y_{N-2} - 5y_{N-1} + 2y_N), \\ y_j'(l_j) = \frac{1}{2h} (y_{N-2}^j - 4y_{N-1}^j + 3y_N^j), \quad y_{j+1}'(0) = \frac{1}{2h} (-3y_1^{j+1} + 4y_2^{j+1} - y_3^{j+1}), \\ y_j''(l_j) = \frac{1}{h^2} (-y_{N-3}^j + 4y_{N-2}^j - 5y_{N-1}^j + 2y_N^j), \quad y_{j+1}''(0) = \frac{1}{h^2} (2y_1^{j+1} - 5y_2^{j+1} + 4y_3^{j+1} - y_4^{j+1}). \end{aligned}$$

Здесь $N = N_0 + n$. Верхние индексы в правых частях означают номер пролета, а нижние – локальные номера узлов. Заметим, что все производные аппроксимированы с точностью $O(h^2)$.

Процедура редукции задачи от дифференциальных уравнений к алгебраическим даёт однородную систему линейных алгебраических уравнений. В матрично-векторной форме записи она имеет вид

$$CY = 0, \quad (4)$$

где вектор $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]$, а матрица C состоит из элементов, получаемых в ходе преобразований и зависящих от искомого значения F_k , т.е. $c_{ij} = c_{ij}(F_k)$.

Ненулевые значения элементов вектора y (хотя бы одного) возможны лишь в том случае, если определитель матрицы C равен нулю. Это требование приводит к характеристическому уравнению

$$\det C(F) = 0.$$

Его решение аналитическими методами затруднительно и определяется в замкнутом виде лишь в некоторых простых случаях. Приближённое решение возможно численными и графическими способами. Графический метод, основанный на возможности быстрой визуализации левой части с помощью современных компьютерных программных сред высокого уровня (MatLab, Mathcad и т.д.) успешно решает проблему определения искомого собственного значения. С этой целью, в координатной системе $F - \det C(F)$ строится соответствующая кривая. Точки её пересечения с осью F и определяют значения критических сил. Для апробации возможности получения значений критических сил данным способом решены тестовые задачи, имеющие точные аналитические решения. Численные эксперименты подтвердили эффективность предлагаемого алгоритма, т.е. высокую степень близости двух результатов.

Пример. Возьмём для проведения вычислений трёхпролётный однородный стальной стержень со следующими параметрами

$$n = 3, l = \{ 1, 2, 1, 6, 1 \} \text{ м}, b_j = b_0^j + b_1^j \sin\left(\frac{\pi x_j}{l_j}\right) \text{ Па} \cdot \text{м}^4,$$

$$b_0 = \{60, 80, 40\} \text{ Па} \cdot \text{м}^4, b_1 = \{6, 8, 10\} \text{ Па} \cdot \text{м}^4.$$

На рисунке 2 показан график $F - \det C$, выданный на монитор компьютера системой MatLab. Видно, что кривая пересекает горизонтальную ось в точках, отмеченных на рисунке. Из него путём многократного увеличения фрагментов получены первые четыре значения критической силы

$$F_k = \{618,02, 1032,94, 1489,82, 2158,92\} \text{ Н}. \quad (5)$$

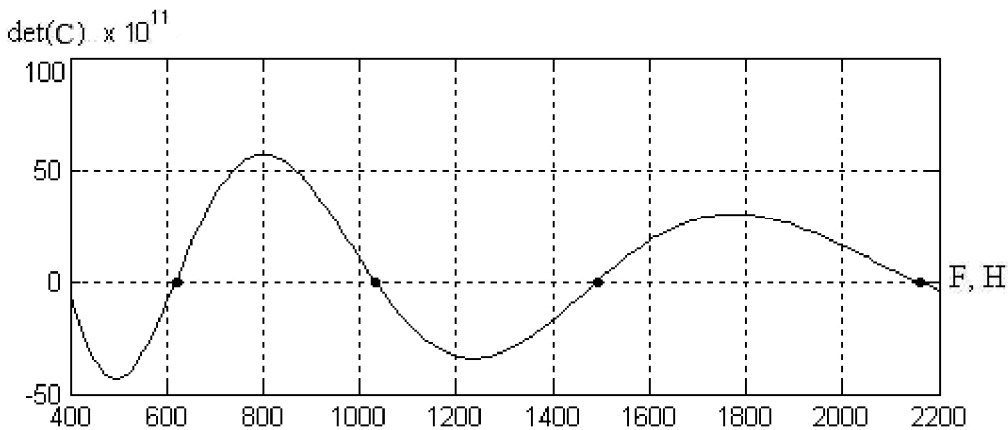


Рис. 2

С помощью известных методов из системы уравнений (4) определяется собственный вектор матрицы C , представляющий собственную функцию задачи (1)–(3). Вектор собственных форм определяется с точностью до постоянного множителя, так как при подстановке критических сил в матрицу C её определитель обращается в нуль. Поэтому для конкретных вычислений один из компонентов вектора Y принимается равной единице, остальные вычисляются из системы (4) с матрицей C , пониженной на один порядок.

Расчёты по определению собственных функций, соответствующих элементам множества (5), дали кривые линии, изображённые на рисунке 3. Здесь X – глобальные координаты с началом на левом конце стержня, номера кривых совпадают с номерами критических сил. По вертикали отложены ординаты нормированного собственного вектора.

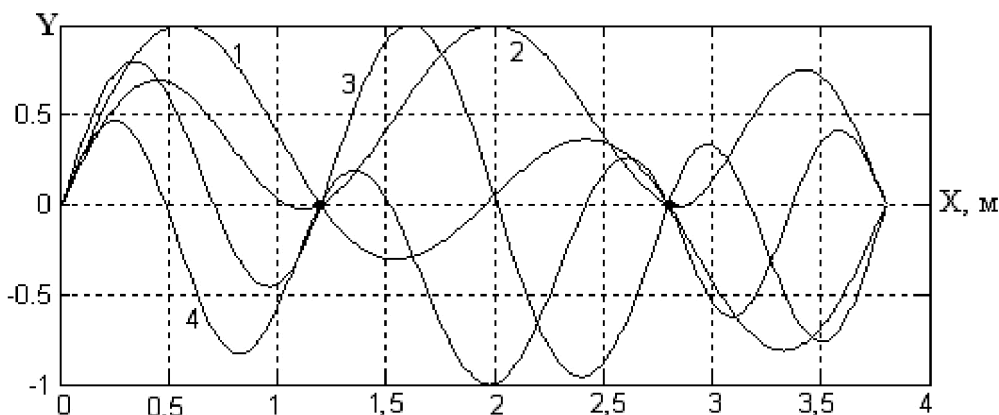


Рис. 3

Резюмируя, можно отметить, что получен сравнительно простой и универсальный способ определения критических сил, основанный на возможностях современной вычислительной техники.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
2. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – М. : Изд-во АСВ; СПб. : СПбГАСУ, 2005. – 425 с.
3. Культербаев Х.П. О структурировании пространства параметров сжатого-растянутого стержня по механическому состоянию // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. – 2009. – № 3. – С. 85–88.

References

1. Volmir A.S. Stability of deformable systems. – M. : Nauka, 1967. – 984 p.
2. Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Numerical methods for solving problems of structural mechanics. – M. : Publishing House of the DIA, St. Petersburg : Civil Engineering, 2005. – 425 p.
3. Kulterbaev Kh.P. On the structuring of the parameter space is compressed, stretched bar on the mechanical state of the // Math. universities. North-Kavk. region. Tech. science. – 2009. – № 3. – P. 85–88.