УДК 001.891

Чубырь Наталья Олеговна
кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель кафедры прикладной математики Кубанского государственного технологического университета
set@id-yug.com

Уртенов Махамет Хусеевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
Кубанского государственного университет

Хромых Анна Алексеевна
Преподаватель кафедры информатики и математики
Краснодарского университета МВД России

Коваленко Анна Владимировна
кандидат экономических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Кубанского государственного университета

Аннотация. В данной статье предложен вывод уравнения для функции тока для плотности тока, не зависящего от других неизвестных функций для модели переноса в приближении закона Ома для симметричного бинарного электролита.

Ключевые слова: функция тока для плотности тока, квазилинейное уравнение в частных производных.

Chubyr Natalya Olegovna
Ph.D. in Physics and Mathematical Sciences, Lecturer Department of Applied Mathematics Kuban State University of Technology
set@id-yug.com

Urtenov Mahamet Huseevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Applied Mathematics
Kuban State University

Khromyh Anna Alekseevna
Lecturer Department of Computer Science and Matematics of the University of Krasnodar Russian MVD

Kovalenko Anna Vladimirovna
Ph.D. in Economics Associate Professor, Department of Applied Mathematics
Kuban State University

Annotation. In this article we propose a derivation of an equation for the stream function for current density, not dependent on other unknown functions for transport models in the approximation of Ohm's law for a symmetric binary electrolyte.

Keywords: a function of the current for current density, quasilinear equation in partial derivatives.

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА

♦ ◆ ♦

THE EQUATION FOR THE STREAM FUNCTION FOR CURRENT DENSITY

Модель переноса в приближении закона Ома для симметричного бинарного электролита ($z_1 = -z_2 = 1$) имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \lambda \Delta \tilde{S} - div(\tilde{S}\vec{V}) - \frac{\varepsilon}{2} div(\|\vec{E}\|^2 \vec{V}) \qquad (1)$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|\vec{E}\|^2 \vec{E} + \tilde{S}\vec{E} = \vec{I} \qquad (2)$$

$$\Delta \eta = \left(\nabla \left(\tilde{S} + \frac{\varepsilon}{2}\|\vec{E}\|^2 \right), \vec{E} \right)_1 \qquad (3)$$

$$t > 0, \ x \in (0,1), \ y \in (0,L)$$

где $\tilde{S}(x,y)$ – заданная, а $\eta(x,y)$ – искомая функции, причем $\eta_y = -I_1, \eta_x = I_2,$ и вектор $\mathbf{I} = (I_1, I_2)$ является плотностью тока, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

К этой системе добавляются граничные условия, которые зависят от конкретной постановки задачи.

Для решения системы (1)–(3) удобно сначала вывести отдельные уравнения не зависящие от других неизвестных функций.

Выведем уравнение для функции тока для плотности тока η, не зависящее от $\vec{E}$.

С учетом
$$u = \frac{\varepsilon}{2}\left\|\vec{E}\right\|^2 + \tilde{S}, \tag{4}$$

уравнения (2) и (3) запишутся в виде
$$u\vec{E} = \vec{I}, \tag{5}$$
$$\Delta\eta = \left(\nabla u, \vec{E}\right)_1 \tag{6}$$

Из (5)
$$\vec{E} = \frac{1}{u}\vec{I} \tag{7}$$

Поэтому $\Delta\eta = \frac{1}{u}\left(\nabla u, I\right)_1$.

Так как $\vec{I}_1 = -\frac{\partial\eta}{\partial y}$, $\vec{I}_2 = \frac{\partial\eta}{\partial x}$, то $\left(\nabla u, I\right)_1 = (\nabla u, \nabla\eta)$, следовательно
$$\Delta\eta = \frac{1}{u}\left(\nabla u, \nabla\eta\right), \tag{8}$$

Подставим (7) в (4)

$u = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{u^2}\left\|\vec{I}\right\|^2 + \tilde{S}$, так как $\left\|\vec{I}\right\|^2 = \left\|\nabla\eta\right\|^2$, то
$$u = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{u^2}\left\|\nabla\eta\right\|^2 + \tilde{S}. \tag{9}$$

Уравнение (9) рассматриваем как уравнение относительно неизвестной функции u:
$$2u^3 = 2u^2\tilde{S} + \varepsilon\left\|\nabla\eta\right\|^2 \tag{10}$$

Чтобы заменить ∇u в (8) в (10) возьмем оператор ∇ от обеих частей, тогда
$$6u^2\nabla u = 4u\tilde{S}\nabla u + 2u^2\nabla\tilde{S} + \varepsilon\nabla\left\|\nabla\eta\right\|^2 \tag{11}$$

Так как,
$$\nabla\left\|\nabla\eta\right\|^2 = 2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}e_1 + 2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}e_2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}e_1\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}e_2, \tag{12}$$

то, подставляя (12) в (11), получим

$$
\begin{aligned}
&2u\left(3u-2\tilde{S}\right)\nabla u = 2u^2\nabla\tilde{S} + \\
&\quad + 2\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}e_1 + 2\varepsilon\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}e_2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}e_1\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + 2\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}e_2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Таким образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{u}\nabla u = \frac{1}{\left(3u-2\tilde{S}\right)}\nabla\tilde{S} + \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}e_1 + \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}e_2 + \frac{\partial\eta}{\partial y}e_1\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}e_2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Подставим (14) в (8) и получим уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\nabla\tilde{S},\nabla\eta\right) + \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \\
&\quad + \frac{2\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Сгруппируем по старшим производным, тогда получим следующее квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + \\
&\quad + \left(1-\frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{1}{\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\nabla\tilde{S},\nabla\eta\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Определим тип уравнения, для этого вычислим

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{\varepsilon^2}{u^4\left(3u-2\tilde{S}\right)^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 - \\
&- \left(1-\frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right) = \\
&= \frac{\varepsilon^2}{u^4\left(3u-2\tilde{S}\right)^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 - \\
&- \left(1-\frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{u^4\left(3u-2\tilde{S}\right)^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right) = \\
&= \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right) - 1 = \\
&= \frac{\varepsilon}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)}\left\|\nabla\eta\right\|^2 - 1 = \frac{\varepsilon(2u^3-2u^2\tilde{S})}{u^2\left(3u-2\tilde{S}\right)\varepsilon} - 1 = \frac{u}{2\tilde{S}-3u}.
\end{aligned}
$$

Тип уравнения зависит от $sign\omega = sign(u(\frac{2}{3}\tilde{S} - u))$. Таким образом, при $\varepsilon > 0$, и $\tilde{S} > 0$ $u \in (-\infty, 0) \bigcup (\frac{2}{3}\tilde{S}, \infty)$ (при $\tilde{S} < 0$ $u \in (-\infty, \frac{2}{3}\tilde{S}) \bigcup (0, \infty)$) тип уравнения будет эллиптический, при $\tilde{S} > 0$ $u \in (0, \frac{2}{3}\tilde{S})$, (при $\tilde{S} < 0$ $u \in (\frac{2}{3}\tilde{S}, 0)$) – гиперболический, а при $u = \frac{2}{3}\tilde{S},\ u = 0$ – параболический.

Для решения уравнения (15) можно использовать асимптотический метод решения или метод последовательных приближений.

Литература

1. Лаврентьев А.В., Уртенов К.М., Хромых А.А., Чубырь Н.О. Полная декомпозиция неодномерной системы уравнений Нернста-Планка-Пуассона для бинарного электролита // Экологический вестник НЦ ЧЭС. – 2009. – № 2. – С. 32–37.
2. Уртенов М.Х., Сеидов Р.Р. Математические модели электромембранных систем очистки воды. – Краснодар : Кубанский государственный университет, 2000. – 139 с.

References

1. Lavrentyev A.V., Urtenov K.M., Khromyh A.A., Chubyr N.O. Complete decomposition of multidimensional equations of Nernst-Planck-Poisson binary electrolyte // Journal of Environmental Science Centre of the BSEC. – 2009. – № 2. – P. 32–37.
2. Urtenov M.H., Seyidov R.R. Mathematical models of electro-membrane water treatment systems. – Krasnodar : Kuban State University, 2000. – 139 p.