УДК 519.72

Булатникова Инга Николаевна
кандидат технических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Кубанского государственного
технологического университета
set@id-yug.com

Bulatnikova Inga Nikolaevna
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Chair of
Applied Mathematics Oscillator,
Kuban State Technological University
set@id-yug.com

Гершунина Наталья Николаевна
кандидат технических наук,
доцент кафедры начертательной геометрии
и инженерной графики
Кубанского государственного
технологического университета

Gershunina Natalia Nikolaevna
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Department of
Descriptive Geometry and Computer
Graphics Oscillator,
Kuban State Technological University

Гершунин Аркадий Эдуардович
соискатель Кубанского государственного
технологического университета

Gershunin Arkady Eduardovich
Applicant of the Kuban State
Technological University

Аннотация. В данной статьи рассматриваются целочисленные процедуры умножения и деления при обработке информации на микропроцессорах RISC-архитектуры.

Ключевые слова. целочисленная арифметика, микропроцессоры, быстродействующие алгоритмы.

Annotation. In this article the integer procedures of multiply and divide during the processing of information on micropro-cessors of RISC-architecture are examined.

Keywords. integer arithmetic, microprocessors, high-performance algorithms.

ПРОЦЕДУРЫ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ АРИФМЕТИКЕ

♦ ♦ ♦

THE PROCEDURES OF MULTIPLICATION AND DIVISION IN INTEGER ARITHMETIC

Появление быстродействующих микропроцессоров с RISC- архитектурой потребовало пересмотра их алгоритмического обеспечения. Дело в том, что набор команд таких микропроцессоров усечен путем исключения умножения, деления и других так называемых длинных операций, то есть операций с данными в формате с плавающей запятой.

Это сделано для повышения быстродействия микропроцессоров и упрощения их конструкции.

Поэтому разработчикам алгоритмического обеспечения пришлось перейти к целочисленной арифметике, т.е. без использования традиционных умножений и делений. Тем не менее необходимость в них возникает при различной обработке информации.

Нами предлагаются целочисленные процедуры обхода традиционных форм умножения и деления. Для этого используются разностно-итерационные алгоритмы, цифровая интерполяция кривых (фактически, сложных функций) и методы геометрического моделирования.

Динамическое умножение и деление

Используя целочисленные алгоритмы цифровой линейной интерполяции двух прямых [1], можем организовать умножение. Например,

$$Y = \frac{x_1 \cdot x_2}{A}, \tag{1}$$

где $A = a_1 \cdot a_2$, число, допускающее свое разложение на два натуральных множителя.

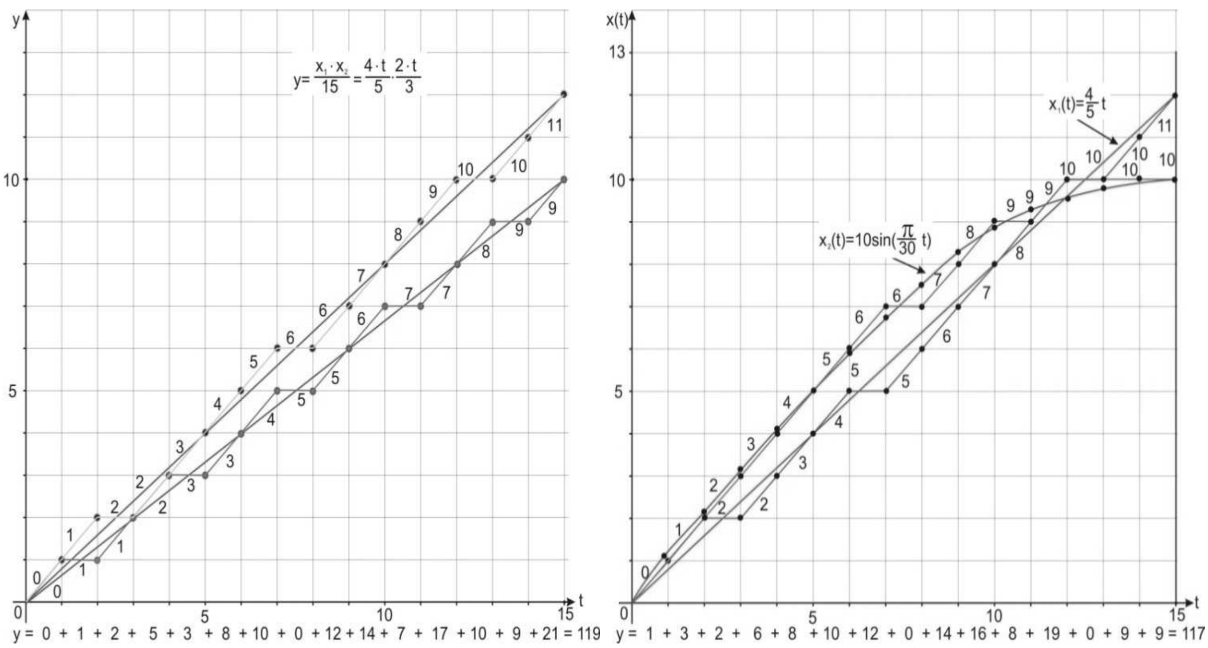
Ведя одновременную цифровую интерполяцию двух прямых $y_1 = \frac{x_1}{a_1} \cdot t$ и $y_2 = \frac{x_2}{a_2} \cdot t$ и применяя целочисленную рекуррентную формулу (2), получим произведение $\frac{x_2 \cdot x_2}{A}$

$$Y_0 = 0,\ Y_{i+1} = Y_i + x_{1i}(t) \cdot \delta_{2i} + x_{2i}(t) \cdot \delta_{1i} + \delta_{1i} \cdot \delta_{2i}, \tag{2}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, A - 1$ – номер итераций, $x_{1i}(t)$ – накопленное значение y_1 (ордината 1-ой прямой), $x_{2i}(t)$ – накопленное значение y_2 (ордината 2-ой прямой), $\delta_{1i} \in \{-1, 0, 1\}$ – приращение 1-ой прямой на *i*-ом шаге, $\delta_{2i} \in \{-1, 0, 1\}$ – приращение 2-ой прямой на *i*-ом шаге.

Таким образом, рекуррентная формула (2) позволяет вычислять произведение и частное от его деления на *A*.

Для понимания вышеизложенного приведем простой пример (ограничимся малыми величинами): $y = \frac{2 \cdot 4}{15}$, т.е. $x_1(t) = 2,\ x_2(t) = 4$, A = 15. Ход итераций изобразим на рисунке *1а.* Верхняя линия соответствует $x_1(t) = \frac{4}{5} \cdot t$, нижняя линия – $x_2(t) = \frac{2}{3} \cdot t$.



а) б)

Рисунки 1 a, b – Графики цифровой интерполяции функций

Числа на линиях – накопленные значения $x_{1i}(t)$ и $x_{2i}(t)$, нижний ряд чисел под осью *t* – приращения величины Y_i. Окончательная сумма этих приращений $Y_{14} = 119$. При делении ее на 15 получим произведение $x_1 \cdot x_2$, то есть 8 (с погрешностью цифровой интерполяции). Заметим, что при больших числах относительная погрешность снижается.

Расширим область применения на случай, когда $x_1(t)$ и (или) $x_2(t)$ являются функциями, например, синусоидой или косинусоидой, получаемыми с помощью целочисленного алгоритма круговой цифровой интерполяции [1, 2]. Пример такого перемножения двух функций $x_1(t) = \frac{4}{5} \cdot t$ и $x_2(t) = 10 \cdot sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot t\right)$ приведен на рисунке *1b*.

Обозначения под рисунком *1b* те же самые. Накопленное значение Y_i является текущим произведением $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Конечное значение $Y_{14}=117$ – это значение произведения $10 \cdot 12 = 120$ (с точностью цифровой интерполяции). Относительная погрешность также снижается с увеличением коэффициентов $\frac{4}{5}$ и 10.

Статическое умножение и деление

Нами предлагается целочисленный алгоритм одновременного деления без восстановления остатка (квазиделения) и умножения

$$q_{i-1}=\operatorname{sign}W_{i-1}=\begin{cases}+1,\ \textit{если}\ W_{i-1}\geq 0;\\ -1,\ \textit{если}\ W_{i-1}<0;\end{cases}$$

$$W_0=w,\ \ W_i=W_{i-1}-q_{i-1}\cdot y\cdot 2^{-i};\tag{3}$$

$$V_0=v,\ V_i=V_{i-1}+q_{i-1}\cdot x\cdot 2^{-i},$$

где i – номер итерации, $i = 1, 2, ..., n - 2$; n – двоичная разрядность операндов, включая знак.

В итоге имеем: $V_{n-2}=v+\frac{w}{y}\cdot x$ (для y > 0). То есть, с помощью целочисленного алгоритма (3) мы можем произвести деление $\frac{w}{y}$ и умножение результата на *x*. Условием сходимости этого алгоритма является неравенство $y>|w|$.

Возможности алгоритма (3) можно значительно расширить, если считать w, v, y, x не как константы, а как новые функции некоторого аргумента (-тов), например, *t* и *s*.

Так, если положить $y(s,t)=s+t,\ x(s,t)=-4s+1, v=s+t+1,\ w=t$, то сможем, используя алгоритм (3), вычислить

$$V_{14}=F(s,t)=\frac{s^2+s-2s\cdot t+t^2}{s+t},\tag{4}$$

без умножения, деления и возведения в квадрат аргументов *s* и *t*.

Динамическое деление на константу

Очень часто переменная величина, например, *V* поступает не в виде единичных приращений ± 1, а в виде многоразрядных приращений, получаемых в ходе предыдущих вычислений. При этом требуется уменьшить ее в *A* раз. Константа *A* должна быть больше максимально возможного (по модулю) многоразрядного приращения. В этом случае в каждом такте вычисляются приращения ± 1 или 0.

Целью целочисленного алгоритма динамического деления на константу *A* является подсчет единичных приращений результата деления в сопоставлении по масштабу *A* с накопленной суммой многоразрядных приращений.

Алгоритм таков. В некоторую ячейку в памяти заносится половина константы с отрицательным знаком, то есть $\left(-\frac{A}{2}\right)$. Далее, при каждом поступлении многоразрядного приращения величины *V* оно подсуммируется к содержимому ячейки *B*. Затем проверяется условие $B\geq 0$. Если – да, то очередное приращение частного равно 1, иначе 0.

В первом случае из ячейки *B* вычитается константа *A*, во втором – ничего не делается. Возможная “1” учитывается счетчиком, где хранится частное от деления накопленного значения величины *V* на константу *A* в данный такт. После этого алгоритм переходит в следующий такт.

Все выше перечисленные алгоритмы, будучи целочисленными, наряду с другими (цифровой интерполяции, разностно-итерационными) алгоритмами обеспечивают реализацию информационных технологий на базе целочисленной арифметики.

Литература

1. Булатникова И.Н. и др. Информационные технологии с использованием целочисленной арифметики // Аналитический н./т. журнал “Геоинжениринг”, НИПИ “ИнжГео”. – 2011. – № 2(11). – С. 54–58.
2. Булатников А.А. Целочисленный алгоритм интерполяции окружности // Сб.трудов XVII международной н./пр. конференции студентов и молодых ученых “Современные техника и технологии”. – Томск, 2011, апрель. С. 301–302.

References

1. Bulatnikova I.N. and oth. Information technologies using integer arithmetic // Analytical n./t. magazine “GeoIngeniring”, NIPI “ InjGeo”. – 2011. – No. 2(11). – P. 54–58.
2. Bulatnikova A.A. Integer interpolation algorithm circumference // collected proceeding XVII international n./pr. conference of students and young scientists “Modern techniques and technologies”. – Tomsk, 2011, April. – C. 301–302.