

УДК 539.3

Барагунова Лялюся Адальбиевна

старший преподаватель кафедры
Теоретической и прикладной механики,
Кабардино-Балкарского государственного
университета им. Х.М. Бербекова
set@id-yug.com

Baragunova Lyalusya Adalbievna

Senior Lecturer, Department of Theoretical
and Applied Mechanics,
Kabardino-Balkaria State University.
H.M. Berbekov
set@id-yug.com

Аннотация. Рассмотрена задача о собственных значениях многопролётного стержня на гибких опорах при сжатии продольными силами. Закритический изгиб оси описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка в локальных координатах. Найдены общие решения. Для определения постоянных интегрирования составлены граничные условия и условия сопряжения пролётов стержня. Получено характеристическое трансцендентное уравнение, которое не имеет аналитического решения в общем случае. Его корни определяются высокоточным графоаналитическим методом на ЭВМ. Изучено влияние жёсткости опор на первые элементы спектра критических сил.

Ключевые слова: устойчивость многопролётных стержней, устойчивость стержней на гибких опорах, критическая сила, характеристическое уравнение.

Annotation. The problem of the eigenvalues of the multispan rod on flexible supports longitudinal compressive forces. Supercritical bending axis is described by a system of ordinary differential equations of the fourth order in the local coordinates. Find general solutions. To determine the constants of integration drawn boundary conditions and matching conditions spans the rod. Retrieved characteristic transcendental equation, which has no analytic solutions in general. Its roots are determined by a high-precision semi-graphical method on a computer. The influence of the stiffness of supports on the first elements of the spectrum of critical forces.

Keywords: stability of multi-span rods, resistance rods on flexible supports, the critical force, the characteristic equation.

О ВЛИЯНИИ УПРУГОСТИ ОПОР НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ



ON THE INFLUENCE OF THE ELASTIC SUPPORT ON THE STABILITY OF COMPRESSED RODS

В классических задачах на устойчивость стержней опоры принимаются абсолютно жёсткими, т. е. не допускающими каких-либо отклонений, перемещений, поворотов. Влияние реально существующей податливости опор на величину критических сил мало изучено. Библиографические сведения по этой проблеме имеют справочный характер [1, 2] неудобны для использования и не обладают достаточной точностью и универсальностью. Между тем, известна чувствительность величины критических сил к почти любым отклонениям расчётной схемы от идеальной (начальные геометрические неправильности формы, нелинейное поведение материала, эксцентриситет приложения нагрузки и т.д.) [3]. Также недостаточно изучена тема устойчивости многопролётных (многоопорных) стержней, по которой имеются незначительное количество публикаций [4–6]. Поэтому изучение влияния упругости опор на устойчивость многопролётных сжатых стержней, предпринятое ниже, представляет практический интерес.

Рассматривается многопролётный сжатый стержень (рис. 1) постоянного сечения с моментами инерции сечений J , пролётами l , на упругих опорах с коэффициента-

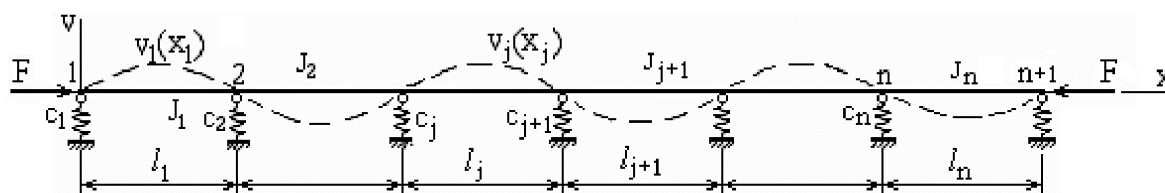


Рис. 1

Здесь значок T в верхнем индексе соответствует операции транспонирования, введены обозначения

$$d_j = c_j / bk^3, \quad s = \sin kl, \quad r = \cos kl, \quad g = -bk^3 r / c_{n+1} - s, \quad p = bk^3 r / c_{n+1} - s,$$

компактно расположенные нулевые элементы матрицы не показаны.

Ненулевые значения элементов вектора C (хотя бы одного) возможны лишь в том случае, если определитель матрицы Q равен нулю. Это требование приводит к характеристическому уравнению

$$\det Q(F) = 0, \tag{6}$$

которое содержит искомые значения критических сил F_k в элементах матрицы Q , т.е. $q_{ij} = q_{ij}(F_k)$. Решение уравнения (6) аналитическими методами затруднительно и корни определяются в замкнутом виде лишь в некоторых простых случаях. Приближённое решение возможно численными и графическими способами. Графический метод, основанный на возможности простой и быстрой визуализации левой части (6) с помощью современных компьютерных программных сред высокого уровня (MatLab, Mathcad и т.д.) успешно решает проблему определения искомых собственных значений. С этой целью, в координатной системе $F - \det Q(F)$ строится соответствующая кривая. Точки её пересечения с осью F и определяют значения критических сил. Для апробации возможности получения значений критических сил данным способом решена тестовая задача, имеющая точные аналитические решения.

Пример 1. Возьмём для проведения тестовых вычислений однопролётный стержень с безразмерными параметрами (задача Эйлера)

$$n = 1, \quad c_1 = c_2 = 10^{10}, \quad \bar{F} = \frac{\pi^2 b}{l^2} = 1.$$

Решением такой спектральной задачи, как известно, является счётный бесконечный ряд

$$F_k = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

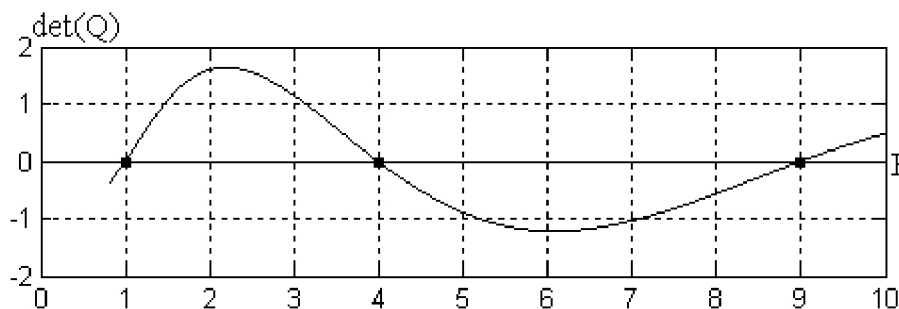


Рис. 2

Кривая, выведенная на экран монитора и показанная на рис. 2, подтверждает эффективность предлагаемого алгоритма, т.е. высокую степень близости двух результатов. Перейдём к примеру с реальными параметрами для конкретных вычислений первых критических сил.

Пример 2. Стальной двухпролётный стержень круглого поперечного сечения с параметрами

$$n = 2, \quad l = 1\text{м}, \quad E = 200\text{ГПа}, \quad d = 1\text{см}$$

на гибких опорах с коэффициентами жёсткости c_1, c_2, c_3 нагружен продольной силой F . Изучим влияние упругости средней опоры ($j = 2$) на значения первых критических сил при $c_1 = c_3 = \infty$.

Таблица 1

№№	C_2 , Н/м	F_1 , Н	F_2 , Н	F_3 , Н	F_4 , Н
1	0	242,2	968,9	2180,1	3875,8
2	10	–	968,9	2158,3 2199,2	3875,8
3	10^2	–	968,9	2100,8 2232,1	3875,8
4	10^3	–	968,9	1826,8 2286,1	3875,8
5	10^5	–	968,9	981,7 2322,6	3875,8
6	10^{10}	–	968,9	2323,4	3875,8

Значения первых критических сил при росте коэффициента жёсткости пружины представлены в таблице. Первая строка соответствует шарнирно опертому классическому случаю однопролётного стержня при $l = 2$ м. Значения критической силы F_k , найденные по графикам, аналогичным рисунку 2 точно совпадают с теоретическими значениями по формуле Эйлера для однопролётной балки

$$F_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Строки 2–5 соответствуют двухпролётной балке с податливой средней опорой. Здесь первая критическая сила классического стержня исчезает, в то же время третья раздваивается, образовавшиеся критические силы отдаляются друг от друга по мере роста жёсткости опоры (строки 3–5). Такой эффект вызван двухпролётностью стержня, влекущей увеличение плотности собственных значений, что замечено в [4] и далее подробно изучено в работе [5].

Выводы:

1. Предложен сравнительно простой и универсальный алгоритм решения задачи на определение критических сил многопролётного стержня на гибких опорах.
2. Графоаналитический метод решения характеристического уравнения даёт высокоточные значения критических сил в сложных задачах устойчивости сжатых стержней, что подтверждается вычислительным экспериментом по тестовой задаче.
3. Жёсткость опор стержня существенно влияет на величину критических сил и состав спектра.

Литература

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Том 3 / Под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. – М. : Машиностроение, 1978. – 312 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
4. Барагунова Л.А. Определение критической силы сжатого стержня с промежуточными опорами // Наука, техника и технология XXI века (НТТ-2005): Материалы второй Всероссийской научно-технической конференции. Ч. II. – Нальчик : Каб.-Балк. ун-т, 2005. – С. 16–20.
5. Чеченов Т.Ю. Об устойчивости многопролётного стержня на гибких опорах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. № 4, часть 2. Труды X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – С. 1850–1851.

6. Кухтербаев Х.П., Чеченов Т.Ю. Об устойчивости многопролётного стержня с переменной жёсткостью. Ростовский госуд. стр. университет. Материалы Международной научно-практической конференции «Строительство – 2006». – Ростов-на-Дону, 2005. – С. 126–128.

References

1. Strength, stability, oscillation. Handbook in three volumes. Volume 3 / edited by Birger I.A., Panovko J.G. – M. : Mechanical Engineering, 1968. – 567 p.
2. Alfutov N.A. Basis of calculation for the stability of elastic systems. – M. : mechanical engineering, 1978. – 312 p.
3. Volmir A.S. Stability of deformable systems. – M. : Nauka, 1967. – 984 p.
4. Baragunova L.A. Determination of the critical force compressed rod with an intermediate supports // Science, Engineering and Technology XXI century (NTT-2005): Proceedings of the Second All-Russian Scientific and Technical Conference. Part II. – Nalchik cab.-Balk. University Press, 2005. – P. 16–20.
5. Chechens T. On the stability of multispan rod on flexible mounts // Bulletin of the Nizhny Novgorod University. NI Novgorod. Number 4, part 2. Proceedings of X All-Russian Congress on the fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Publishing House of the UNN them. NI Lobachevsky, 2011. – P. 1850–1851.
6. Kulkterbaev J.P., Chechenov T. On the stability of multispan rod with variable stiffness. Rostov govt. p University. International scientific and practical conference "Building – 2006". – Rostov-on-Don, 2005. – P. 126–128.