УДК 622.276.5

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

ESTIMATION OF THE ACCURACY OF THE NUMERICAL CALCULATION OF ANALYTICAL SOLUTIONS OF FILTRATION PROBLEMS IN OIL RESERVOIRS WITH DOUBLE POROSITY

Шарнов Александр Иванович
канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедры машин и оборудования нефтяных и газовых промыслов,
Армавирский механико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»
a.i.sharnov@mail.ru

Курдагия Нугзар Эльдарович
студент,
Армавирский механико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет»
kurdagia.nugzar@yandex.ru

Sharnov Alexander Ivanovich
Ph.D., Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Machinery and Equipment for Oil and Gas Fields,
Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) FSBEI HE «Kuban State Technological University»
a.i.sharnov@mail.ru

Kurdagia Nugzar Eldarovich
Student,
Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) FSBEI HE «Kuban State Technological University»
kurdagia.nugzar@yandex.ru

Аннотация. При числовых расчетах замена бесконечного ряда суммой конечного числа слагаемых или переход от несобственного интеграла к определенному интегралу приводит к отклонению получаемых приближенных решений от точного. В статье приводится метод оценки погрешности аналитических решений ряда задач фильтрации в трещиновато-поровых средах с двойной пористостью.

Ключевые слова: оценка, точность, численный, расчет, решение, задача, фильтрация, скважина, пласт, погрешность, трещинно-поровый.

Annotation. In numerical calculations, the replacement of an infinite series by the sum of a finite number of terms or the transition from an improper integral to a definite integral leads to a deviation of the resulting approximate solutions from the exact one. The article presents a method for estimating the error of analytical solutions of a number of filtration problems in fractured-porous media with double porosity.

Keywords: estimation, accuracy, numerical, calculation, solution, problem, filtration, well, reservoir, error, fracture-porous.

К месторождениям трещинно-порового типа относится значительная часть мировых запасов углеводородов (Иран, Ирак, Саудовская Аравия, Мексика, Вьетнам), в том числе и ряда регионов России (Прикаспийская впадина, Восточная и Западная Сибирь, Урало-Поволжье, Северный Кавказ). В комплексе задач совершенствования системы проектирования, разработки и эксплуатации месторождений трещинно-порового типа особое место занимают задачи гидродинамических исследований сложных пластовых процессов. Исследованием особенностей фильтрации пластовых флюидов в средах с двойной пористостью занимался большой круг исследователей на протяжении более 60 лет. Накоплен большой теоретический и экспериментальный материал, однако остается еще немало вопросов, связанных как с более полным учетом реальных факторов, влияющих на развитие гидродинамических процессов в пласте, так и со сложностью решения краевых задач теории фильтрации. Решения рассмотренных задач фильтрации в аналитической форме представляют собой несобственные, определенные интегралы или функциональные ряды, либо их комбинации. В итоге численные расчеты по асимптотическим формулам приводит к отклонению от точных решений. Поэтому задача аналитической оценки, получаемых при этом погрешностей, является значимой и актуальной.

В статье [1] для случая пористой среды получено решение в виде несобственного интеграла, который получается из (2.14) при $\xi \to \infty$, и имеет вид:

$$u(r,Fo)=1+\frac{2}{\pi}r^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\infty}\frac{J_\gamma(x)Y_\gamma(x_0)-Y_\gamma(x)J_\gamma(x_0)}{J_\gamma^2(x_0)+Y_\gamma^2(x_0)}e^{-u^2F_0}\frac{du}{u}. \qquad (1)$$

Так как нижний и верхний пределы интегрирования являются особыми точками, то представим интеграл, входящий в формулу (1) в виде:

$$\int\limits_0^\infty A(u)e^{-u^2F_0}\,\frac{du}{u}=\int\limits_0^p A(u)\frac{e^{-u^2F_0}}{u}\,du+\int\limits_p^P A(u)\frac{e^{-u^2F_0}}{u}\,du+\int\limits_P^\infty A(u)\frac{e^{-u^2F_0}}{u}\,du\,,$$

где
$$A(u)=\frac{J_\gamma(x)Y_\gamma(x_0)-Y_\gamma(x)J_\gamma(x_0)}{J_\gamma^2(x_0)+Y_\gamma^2(x_0)},\;\; x=\frac{2}{2-n}r^{\frac{2-n}{2}}u\,.$$

Теперь задача сводится к выбору p и P таким образом, чтобы абсолютная величина первого и третьего интеграла суммы не превосходила наперед заданного значения ε.

Используя формулы для функций Бесселя при малых значениях аргумента

$$J_\gamma(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\gamma;\;\; Y_\gamma(x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\gamma, \tag{2}$$

получим
$$\left|\int\limits_0^p A(u)e^{-u^2F_0}\,\frac{du}{u}\right|\le\int\limits_0^p\frac{B(r)u^{2\nu}du}{u\left(\alpha u^{4\nu}+\beta\right)}\le\frac{B(r)}{\beta}\int\limits_0^p u^{2\nu-1}du=\frac{B(r)p^{2\nu}}{2\beta\nu}<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$p^{2\nu}<\frac{2\nu\varepsilon\beta}{B(r)},$$

где

$$B(r)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1)\pi}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu-\left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu\right];$$

$$\beta=\frac{\Gamma^2(\nu)}{\pi^2}\left(\frac{2-n}{r_0^{\frac{2-n}{2}}}\right)^{2\nu};\;\;\alpha=\frac{1}{\Gamma^2(\nu+1)}\left(\frac{r^{\frac{2-n}{2}}}{2-n}\right)^{2\nu}.$$

Используя асимптотические формулы для бесселевых функций при больших значениях аргумента,

$$\begin{aligned}J_\gamma(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\\ Y_\gamma(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

получим

$$\int\limits_p^\infty\sqrt{\frac{x_0}{x}}\left[\cos y\sin y_0-\sin y\cos y_0\right]e^{-uF_0}\,\frac{du}{u},$$

$$y=x-\frac{\pi\gamma}{2}-\frac{\pi}{4};\;\;\; y_0=x_0-\frac{\pi\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

Далее, для каждого значения критерия $F_0=\frac{\kappa t}{r_0^2}$ существует такое значение u_0, что при $u\ge u_0$ выполняется соотношение

$$\exp\left(-u^2Fo\right)\le\frac{1}{u^2}.$$

т.е. $u=u(F_0)$. Пусть $p_1=u_0$.

Тогда имеет место следующая оценка:

$$\left|\int\limits_{p_1}^\infty\sqrt{\frac{x_0}{x}}\sin(x_0-x)e^{-u^2Fo}\,\frac{du}{u}\right|\le\left|\int\limits_{p_1}^\infty\frac{\sqrt{\frac{x_0}{x}}\sin(x_0-x)du}{u^3}\le\frac{1}{2u^2}\right|_\infty^{p_1}=\frac{1}{2p_1^2}<\varepsilon,$$

учитывая, что $\frac{x_0}{x} << 1$.

Число p_1 может не обеспечивать выполнения неравенства

$$\frac{1}{2p_1^2} < \varepsilon. \tag{4}$$

Однако для любого значения ε найдется число p_2 такое, что при $p \geq p_2$ неравенство (4) будет справедливо.

Если положить $P = max(p_1, p_2)$, требуемое соотношение будет выполнено:

$$\left|\int_P^\infty A(u) e^{-u^2 Fo} \frac{du}{u}\right| \leq \frac{1}{2} < \varepsilon.$$

Поставленная задача решена. Требуемая оценка получена.

В статье [2] получено аналитическое решение (25) задачи фильтрации при работе несовершенной скважины с постоянным дебитом в неограниченном трещиновато-пористом пласте. Формулу (25), введя замену $\rho = \frac{-u^2}{1+\xi u^2}$, удобно представить для численных расчетов в виде:

$$u(r,z,Fo) = \frac{2lr^{-\frac{n}{2}}}{\pi h}\int_0^{b^2} \frac{D(u)\left[1-exp\left(-\frac{u^2 Fo}{1+\xi u^2}\right)\right]}{u^2} du +$$

$$+\frac{2r^{-\frac{n}{2}}}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Lambda_m}{m}\int_{a_m^2}^{b^2}\frac{D_m(u)\left[1-exp\left(-\frac{\left(u^2+\lambda_m^2\right)Fo}{1+\xi\left(u^2+\lambda_m^2\right)}\right)\right]}{u^2+\lambda_m^2} du, \tag{5}$$

где

$$D(u) = \frac{J_\gamma(x)Y_{\gamma-1}(x_0) - J_{\gamma-1}(x_0)Y_\gamma(x)}{J_{\gamma-1}^2(x_0) + Y_{\gamma-1}^2(x_0)}.$$

Оценим ряд, входящий в формулу (5). Для каждого значения безразмерного параметра Fo существует номер N_1 такой, что при $m > N_1$ выполняется неравенство

$$1-exp\left(-\frac{\left(u^2+\lambda_m^2\right)Fo}{1+\xi\left(u^2+\lambda_m^2\right)}\right) < \frac{1+u^2\xi+\lambda_m^2\xi}{u^2+\lambda_m^2}.$$

Т.е. число N_1 является функцией критерия Fo. Поэтому абсолютную величину $\tilde{u}(r,Z,Fo)$ остатка ряда, входящего в (5) можно оценить следующим образом:

$$\tilde{u}(r,Z,Fo) = \left|\sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{2\sin\lambda_m l\cos\lambda_m z}{m}\int_{a_m^2}^{b^2}\frac{D(u)}{u^2+\lambda_m^2}\left[1-exp\left(-\frac{\left(u^2+\lambda_m^2\right)Fo}{1+\xi\left(u^2+\lambda_m^2\right)}\right)\right]\right| du \leq$$

$$\leq \sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{2}{m}\left|\int_{a_m^2}^{b^2}\frac{D_m(u)}{u^2+\lambda_m^2}\frac{1+\left(u^2+\lambda_m^2\right)\xi}{u^2+\lambda_m^2}du\right| \leq \sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{2}{m}\frac{D_m\left[1+\xi\left(u^2+\lambda_m^2\right)\right]}{\left(u^2+\lambda_m^2\right)^2},$$

где

$$D_m = max\left|D_m(u)\right| \text{ на } \left[a_m^2, b\right]$$

При $\xi = 0$

$$\tilde{u}(r,Z,Fo) = \sum_{N_1}^{\infty}\frac{2D_m}{m}\left[\int_{a_m^2}^{b}\frac{du}{\left(u^2+\lambda_m^2\right)^2} \leq \int_{a_m^2}^{b}\frac{du}{u^4} = \frac{b^3-a_m^6}{3b^2a_m^6} < \frac{1}{3a_m^6}\right].$$

Известно [5], что $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90}$, поэтому

$$\tilde{u}(r,Z,Fo)\le\frac{2B_m h^3}{\pi^3}\sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{1}{m^4}=\frac{2B_m h^3}{3\pi^3}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}-\sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right|=\frac{2B_m h^3}{3\pi^3}\left|\frac{\pi^4}{90}-\sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right|<\beta, \tag{6}$$

где β – численная величина наперед заданной погрешности приближенного решения.

Из неравенства (6) следует

$$\left|\frac{\pi^4}{90}-\sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right|<\frac{3\pi^3}{2hA_m}\beta=\beta_1. \tag{7}$$

Число N_1 может не обеспечить выполнения полученного неравенства.

Однако для всякого значения β_1 существует номер N_2 такой, что при $N \ge N_2$ неравенство (7) справедливо:

$$\left|\frac{\pi^4}{90}-\sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right|<\beta_1,$$

т.е. число N_2 является функцией величины β_1.

Таким образом, для любого значения времени t, (или для соответствующего ему значения Fo) при любом u из интервала $\left[a_m^2, b\right]$ можно выбрать такое число $N_0 = max\,(N_1, N_2)$, чтобы выполнялось требуемое соотношение

$$\tilde{u}(r,Z,Fo)\le\frac{2B_m h^3}{3\pi^3}\left|\frac{\pi^4}{90}-\sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right|<\beta.$$

Найденное значение N_0 остается годным при $Fo > t_0$.

При исследовании процессов фильтрации в конечных областях получаем решение в виде формул (12), (15) [3] и (14), (16) [4], которые с помощью замены соответственно

$$\rho=-\frac{u^2}{1+\xi u^2} \text{ и } \rho=-\frac{u^2+\lambda_m^2}{1+\xi\left(u^2+\lambda_m^2\right)}$$

можно представить в виде более удобном для проведения расчетов.

Так, формула (12) [3] будет иметь вид:

$$u_2(r,Fo)=\frac{R^n-r^n}{R^n-1}+r^{-\frac{n}{2}}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_\gamma(x_0\alpha_k)J_\gamma(y\alpha_k)}{J_\gamma^2(y\alpha_k)-J_\gamma^2(x_0\alpha_k)}M\,exp\left(-\frac{\alpha_k^2F_0}{1+\alpha_k^2\xi}\right). \tag{8}$$

Оценим ряд, который входит в решение (8) при $\xi = 0$. Используя асимптотические формулы для больших значений аргумента, абсолютную величину $\tilde{u}(r,Fo)$ остатка ряда, входящего в (8), можно оценить следующим образом:

$$\tilde{u}(r,Fo)=\left|r^{-\frac{n}{2}}\pi\sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha_k^4}\sqrt{\frac{x_0}{x}}\frac{1}{(x_0-y)}\right|\le\frac{2r^{-\frac{n}{2}}\pi}{\pi}\sum_{N_1+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_k^4C}\right|.$$

Оценим общий член этого ряда при заданных x_0 и y, при $\xi = 0$.

$$C=\frac{2}{2-n}\left|1-R^{\frac{2-n}{2}}\right|.$$

Известно [5], что $\sum\limits_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}=\frac{\pi^4}{90}$ и поэтому остаток ряда можем оценить следующим образом

$$\tilde{u}(r,Fo) \le \frac{r^{-\frac{n}{2}}2h^4}{C\pi^4}\sum_{N_1+1}^{\infty}\frac{1}{m^4} = \frac{r^{-\frac{n}{2}}2h^4}{C\pi^4}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4} - \sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right| = \frac{r^{-\frac{n}{2}}2h^4}{C\pi^4}\left|\frac{\pi^4}{90} - \sum_{N=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right| < \varepsilon, \qquad (9)$$

где ε – численная величина наперед заданной погрешности приближенного решения.

Для каждого значения Fo существует номер N_1 такой, что при $N > N_1$ выполняется неравенство:

$$exp\left(-\frac{\alpha_k^2 F_0}{1+\alpha_k^2\xi}\right) < \frac{1}{\alpha_k^3},$$

т.е. число N_1 является функцией критерия Fo.

Из неравенства (9) следует

$$\left|\frac{\pi^4}{90} - \sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right| < \frac{\varepsilon C\pi^4}{r^{-\frac{n}{2}}2h^4} = \varepsilon_1 . \qquad (10)$$

Число N_1 может не обеспечивать выполнения полученного неравенства. Однако для всякого значения ε_1 существует N_2 такое, что при $N \ge N_2$, неравенство (10) справедливо:

$$\left|\frac{\pi^4}{90} - \sum_{m=1}^{N_1}\frac{1}{m^4}\right| < \varepsilon_1 .$$

Таким образом, для любого значения времени Fo и при любых значениях $r \in [r_0, R]$ можно выбрать такое число $N = max(N_1, N_2)$, чтобы выполнялось требуемое соотношение $\tilde{u}_2(r,Fo) \le \varepsilon_1$.

Список литературы:

1. Шарнов А.И. Фильтрация к скважине в гетерогенном пласте двойной пористости // Булатовские чтения. – 2018. – Т. 2-2. – С. 222–231.

2. Шарнов А.И. Фильтрация в горизонтальном гетерогенном по проницаемости пласте к несовершенной скважине с постоянным дебитом // Булатовские чтения. – 2019. – Т. 2. – С. 218–224.

3. Аладьев А.П., Шарнов А.И. Фильтрация жидкости к совершенной скважине в ограниченном трещиновато-пористом пласте с постоянным давлением на контуре питания // Прикладные вопросы точных наук : материалы II Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей, посвященной 100-летию со дня образования Кубанского государственного технологического университета. Армавир, 2– 3 ноября 2018 г. – Армавир : Изд-во АГПУ, 2018. – С. 38–40.

4. Демьянко А.В., Шарнов А.И. Фильтрация жидкости к совершенной скважине в ограниченном трещиновато-пористом пласте с нулевым расходом на контуре питания // Прикладные вопросы точных наук : материалы II Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей, посвященной 100-летию со дня образования Кубанского государственного технологического университета. Армавир, 2–3 ноября 2018 г. – Армавир : Изд-во АГПУ, 2018. – С. 40–43.

5. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

List of references:

1. Sharnov A.I. Filtration to the well in a heterogeneous double porosity reservoir // Bulatov Readings. – 2018. – V. 2–2. – P. 222–231.

2. Sharnov A.I. Filtration in a horizontal heterogeneous in permeability reservoir to an uncompleted well with constant flow rate // Bulatov Readings. – 2019. – V. 2. – P. 218–224.

3. Aladyev A.P., Sharnov A.I. Filtration of fluid to a perfect well in a limited fracture–porous formation with constant pressure on the feed contour // Applied problems of exact sciences : materials of II International scientific–practical conference of students, graduate students, teachers, dedicated to the 100th anniversary of Kuban State Technological University. Armavir, November 2–3, 2018. – Armavir : Publishing house of ASPSU, 2018. – P. 38–40.

4. Demyanko A.V., Sharnov A.I. Filtration of fluid to a perfect well in a limited fracture–porous formation with zero flow rate on the supply contour // Applied issues of exact sciences : materials of II International Scientific–Practical Conference of students, graduate students, teachers, dedicated to the 100th anniversary of Kuban State Technological University. Armavir, November 2–3, 2018. – Armavir : Publishing house of ASPSU, 2018. – P. 40–43.

5. Gradshtein I.S. and Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. – M. : Nauka, 1971. – 1108 p.