УДК 622.83

# ТОЛСТОСТЕННЫЙ УПЛОТНИТЕЛЬ ИЗ АНТИФРИКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

●●●●●●

# HICK-WALLED SEALANT MADE OF SLIDING MATERIAL

**Гулгазли Алескер Самед оглы**
профессор кафедры механика,
Азербайджанского государственного
университета Нефти и Промышленности
alesker.gulgezli@mail.ru

**Дашдыуев Шахрияр Исрафил оглы**
магистрант кафедры механика,
Азербайджанского государственного
университета нефти и промышленности
sehriyardashdiyev@gmail.com

**Аннотация.** В работе проведены расчеты на жесткость цилиндрического уплотнителя из антифрикционного материала. Решение задачи проведено в два этапа. В первом этапе определено внутреннее давление, при котором внутренняя поверхность цилиндра получает заданное перемещение. В втором этапе определено значение сжимающей силы, при котором закрывается внешний зазор, при этом внутреннее давление равняется нулю.

**Ключевые слова:** уплотнитель, цилиндр, перемещение, напряжение, деформация, сила, равновесие.

**Gulgazli Alesker Samed oglu**
Professor of the department of Mechanics,
Azerbaijan state university
of Petroleum and Industries
alesker.gulgezli@mail.ru

**Dashdiuev Shahriyar Israfil oglu**
Master of Mechanics Department,
Azerbaijan STATE University
of Petroleum and Industries
sehriyardashdiyev@gmail.com

**Annotation.** The work carried out calculations on the stiffness of a cylindrical sealant made of antifriction material. The solution to the problem was carried out in two stages. In the first stage, the internal pressure is determined at which the internal surface of the cylinder receives a predetermined displacement. In the second stage, the value of the compressive force is determined at which the external gap is closed, while the internal pressure is zero.

**Keywords:** sealer, cylinder, displacement, stress, deformation, force, balance.

Для изготовления радиальных уплотнений применяются графитовые антифрикционные материалы. Уплотнения, изготовленные из данных материалов, работают в широком диапазоне рабочих температур и давлений, обладают высокими антифрикционными свойствами, хорошей механической прочностью, износостойкостью и химической стойкостью.

Антифрикционные материалы – это специальные материалы, которые применяются для деталей машин, подвергающихся при работе трению скольжения, но при этом. обладающих в определённых условиях низким коэффициентом трения. Антифрикционные материалы отличаются низкой способностью к адгезии, теплопроводностью и стабильностью свойств, а самое главное хорошей прирабатываемостью (т.е. способностью трущихся тел в начальный период трения постепенно улучшать контактирование поверхностей за счет их сглаживания)

### Постановка задачи

Толстостенный цилиндр из антифрикционного материала внутренним радиусом $r_1$, и внешним радиусом $r_2$ надет на абсолютно жесткий цилиндр с внешним радиусом $r_0$, причем $r_0 > r_1$. Это условие означает, что цилиндр находится под действием внутреннего давления, которое не задано. На втором этапе этот цилиндр сжимается продольной силой P, при этом закрывается зазор между внешней поверхностью цилиндра и внешним жестким цилиндром радиуса $r_3$. На втором этапе нагружения, напряжения, возникающие под внутренним давлением, будут играть роль начальных напряжений. Решение этой задачи разделим на следующие этапы.

1. Определение начальных напряжений для линейно-упругого материала. Если считать, что длина цилиндра намного больше его толщины, т.е. $h >> r_2 - r_1$ где – h высота цилиндра, то будут иметь место плоские деформации. Уравнения равновесия для плоской задачи теории упругости в полярной системе координат, когда отсутствуют массовые силы, имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \dfrac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \end{cases} . \qquad (1)$$

Решение этой системы может быть принято в виде [1]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi^2}; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \end{cases} . \quad (2)$$

где Φ(r, φ) – функция напряжений Эри в полярной системе координат; $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{rr}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – суть компоненты напряжений и должны удовлетворять условию:

$$\Delta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \ , \quad (3)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа в полярной системе координат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя выражения $\sigma_{rr}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ из (2) в (3), получаем следующее бигармоническое уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right) = 0. \quad (4)$$

Если учитывать, что поставленная задача осесимметричная, т.е. напряжения и деформации не зависят от φ, то уравнение (4) получает вид:

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{dr} = 0 .$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi = A\ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D . \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) для компонентов напряжений, получаем:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A \cdot \frac{1}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -A \cdot \frac{1}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C \\ \sigma_{r\varphi} = 0 \end{cases} . \quad (6)$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования мы должны иметь три условия. Два из них являются следующие:

$$u_r = r_0 - r_1, \text{ при } r = r_1; \ P_2 = 0 \text{ при } r = r_2. \quad (7)$$

где $u_r$ радиальное перемещение, $P_2$ – внешнее давление. Третьим условием является независимость проекций вектора перемещения $u_r$, $u_\varphi$ от полярного угла φ. Из закона Гука:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}\right] =$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\left\{-\frac{A}{r^2} + B\left[(3-4\nu) + 2(1-2\nu)\ln r\right] + 2C(1-2\nu)\right\}.$$

где E-модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона. Из этих соотношений получаем:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1+\nu}{E}\left\{-\frac{A}{r} - B\left[1 - 2(1-2\nu)\ln r\right] + 2C(1-2\nu)r\right\} + f(\varphi) \\ u_\varphi = \frac{4(1-\nu)^2}{E} Br\varphi - \int f(\varphi)d\varphi + g(r) \end{cases} . \quad (8)$$

где f(φ) и g(r) произвольные функции интегрирования. Чтобы $u_r$ и $u_\varphi$ были независимыми от φ должны выполняться условия f(φ) = 0; B = 0. Положив в соотношениях (6) B = 0 получаем:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A \cdot \dfrac{1}{r^2} + 2C \\ \sigma_{rr} = -A \cdot \dfrac{1}{r^2} + 2C \\ \sigma_{r\varphi} = 0 \end{cases} \qquad . \tag{10}$$

Приняв в первом уравнении (8) B = 0 и f(φ) = 0 имеем:

$$\mathrm{u_r} = \frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r} + 2C(1-2\nu)\mathrm{r}\right]. \tag{11}$$

Учитывая (11) в условиях (7) для определения A и C получаем:

$$\begin{cases} \mathrm{A} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{r_2}^2} + 2\mathrm{C} = 0 \\ \dfrac{1+\nu}{\mathrm{E}}\left[-\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{r_1}} + 2\mathrm{C}(1-2\nu)\mathrm{r_1}\right] = \mathrm{r_0} - \mathrm{r_1} \end{cases}. \tag{12}$$

Из (12) для A и C получаем:

$$\mathrm{A} = \frac{-\mathrm{r_1 r_2^2(r_0 - r_1)E}}{(1+\nu)\left[\mathrm{r_1^2}(1-2\nu) + \mathrm{r_2^2}\right]}; \cdot \mathrm{C} = \frac{\mathrm{r_1(r_0 - r_1)}E}{(1+\nu)\left[r_1^2(1-2\nu) + r_2^2\right]}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (10) для напряжений имеем:

$$\begin{cases} \sigma_{\mathrm{rr}} = -\dfrac{\mathrm{r_1 r_2^2(r_0 - r_1)E}}{(1+\nu)\left[\mathrm{r_1^2}(1-2\nu)+\mathrm{r_2^2}\right]} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{r^2}} + \dfrac{\mathrm{r_1(r_0 - r_1)E}}{(1+\nu)\left[\mathrm{r_1^2}(1-2\nu)+\mathrm{r_2^2}\right]} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \dfrac{\mathrm{r_1 r_2^2(r_0 - r_1)E}}{(1+\nu)\left[\mathrm{r_1^2}(1-2\nu)+\mathrm{r_2^2}\right]} \cdot \dfrac{1}{\mathrm{r^2}} + \dfrac{\mathrm{r_1(r_0 - r_1)E}}{(1+\nu)\left[\mathrm{r_1^2}(1-2\nu)+\mathrm{r_2^2}\right]} \end{cases}. \tag{14}$$

2. Теперь предположим, что на цилиндр действует сжимающая продольная сила F. Задача осесимметричная, поэтому связи между компонентами тензора деформации и вектора перемещений будут:

$$\begin{cases} \bar{\mathrm{u}}_\varphi = 0; \quad \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{rr}} = \dfrac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\partial \mathrm{r}}; \quad \bar{\mathrm{e}}_{\varphi\varphi} = \dfrac{\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\mathrm{r}}; \quad \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{xx}} = \dfrac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} \\ \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{rx}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\partial \mathrm{x}} + \dfrac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{r}}\right); \quad \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}\varphi} = 0; \quad \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}\varphi} = 0 \end{cases} \quad . \tag{15}$$

Выражения компонентов напряжения через компоненты вектора перемещения будут:

$$\bar{\sigma}_{\mathrm{rr}} = \frac{\nu \mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\mathrm{r}} + \frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{\nu \mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\mathrm{r}} + \frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}}\right],$$

$$\sigma_{\mathrm{xx}} = \frac{\nu \mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\partial \mathrm{р}} + \frac{\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r}}{\mathrm{р}} + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{з}}{\partial \mathrm{з}}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{rx} = \frac{\nu E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r}\right]; \quad \bar{\sigma}_{r\varphi} = \bar{\sigma}_{r\varphi} = 0, \tag{16}$$

где

$$\begin{cases} \bar{e}_{rr} = e_{rr} - e^0_{pp} \\ \bar{e}_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} - e^0_{\varphi\varphi} \\ \bar{e}_{xx} = e_{зз} - e^0_{зз} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{\mathrm{rr}} = \sigma_{rr} - \sigma^0_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma^0_{\varphi\varphi} \\ \bar{\sigma}_{\mathrm{xx}} = \sigma_{xx} - \sigma^0_{xx} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{r} = \mathrm{u}_r - \mathrm{u_{r0}} \\ \bar{\mathrm{u}}_\varphi = \mathrm{u}_\varphi - \mathrm{u}_{\varphi 0} \\ \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x} = \mathrm{u_x} - \mathrm{u_{x0}} \end{cases}; \tag{17}$$

$\sigma_{rr}^0$, $\sigma_{\phi\phi}^0$, $\sigma_{xx}^0$ являются начальными напряжениями и определяются выражениями (14) ($\sigma_{xx}^0 = 0$) $\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{xx}$ – напряжения возникшие после приложения силы F, $e_{rr_3}^0, e_{\phi\phi}^0, e_{xx}^0$ – начальные деформации и выражаются через $\sigma_{rr}^0$, $\sigma_{\phi\phi}^0$, $\sigma_{xx}^0$ с помощью закона Гука. $u_{r0}$, $u_{\varphi 0}$. $u_{z0}$ – начальные перемещения.

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат следующие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\overline{\sigma}_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \dfrac{\overline{\sigma}_{rr} - \overline{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \\ \dfrac{\partial\overline{\sigma}_{rx}}{\partial r} + \dfrac{\partial\overline{\sigma}_{xx}}{\partial z} + \dfrac{\overline{\sigma}_{xr}}{r} = 0 \end{cases}. \tag{18}$$

Если положить:

$$\begin{cases} u_r = -\dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} \\ u_x = \dfrac{1+\nu}{E}\left[(1-2\nu)\Delta\Phi + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right]. \end{cases} \tag{19}$$

То формулы (16) примут вид:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_{rr} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) \\ \overline{\sigma}_{\varphi\varphi} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\Phi - \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right) \\ \overline{\sigma}_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta\Phi - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) \\ \overline{\sigma}_{rx} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta\Phi - \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) \end{cases}. \tag{20}$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ – оператор Лапласа Φ(r, x) – функция напряжений.

Функции (20) тождественно удовлетворяют первому уравнению (18), а второе уравнение принимает вид:

$$\Delta\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{21}$$

Когда функция Φ зависит только от r уравнение (21) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0.$$

Которое допускает решение [2]:

$$\Phi = A\ln r + Br^2\ln r + Cr^2 + D.$$

где A, B, C, D, постоянные интегрирования.

Исходя из этого, решение (21) ищем методом вариации постоянной в следующем виде:

$$\Phi = A(x)\ln r + B(x)r^2\ln r + C(x)r^2 + D(x). \tag{22}$$

Определяя из (22) производные и подставляя в (21) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\Phi = \Delta\Phi_1 = \left(8B'' + A^{1v}\right)\ln r + B^{1v}r^2\ln r + 8B'' + \\ + 8C'' + C^{1v}r^2 + D^{1v} = 0 \end{aligned}, \tag{23}$$

где введено обозначение $\Phi_1 = \Delta\Phi$.

Уравнение (23) удовлетворяется при выполнении условий:

$$\begin{cases} 8B'' + A^{IV} = 0 \\ 8B'' + 8C'' + D^{IV} = 0 \\ B^{IV} = 0 \\ C^{IV} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Докажем, что эти условия действительно удовлетворяются. Из физических соображений понятно, что компоненты напряжений не должны зависеть от x. Тогда из (20):

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2A\frac{1}{r^2} - 2B\right).$$

Следовательно, $2A\frac{1}{r^2} - 2B$ должно быть линейной функцией от x, т.е.:

$$A = a_1x + a_0;\ B = b_1x + b_0 \Rightarrow A'' = B'' = 0. \tag{25}$$

Тогда удовлетворяются первое и третье условия (24) и

$$\Delta\Phi = 4B\ln r + 4B + 4C + C''r^2 + D''. \tag{26}$$

Для рассматриваемой задачи $\sigma_{rz} = 0$. С учетом (26) в третьем уравнении (20) имеем:

$$\sigma_{rz} = 4(1-\nu)B\frac{1}{r} - 2\nu C''r = 0 \Rightarrow B = 0;\ C'' = 0. \tag{27}$$

Тогда и четвертое уравнение (24) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения следует, что должно удовлетворятся $D^{1\nu} = 0$. С учетом (25) и (27) имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = A\frac{1}{r} + 2Cr;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = -A\frac{1}{r^2} + 2C;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = D'';\ \Delta\Phi = 4C + D'';\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial x} = A'\frac{1}{r} + 2rC'. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (20) для компонентов напряжений имеем:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{rr} = A'\frac{1}{r^2} + 2(2\nu-1)C' + \nu D^{III} \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -A'\frac{1}{r^2} + 2(2\nu-1)C' + \nu D^{III} \\ \bar{\sigma}_{xx} = 4(2-\nu)C' + (1-\nu)D^{III} \qquad \bar{\sigma}_{rx} = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\begin{cases} A = a_1x + a_0;\quad A' = a_1 \\ C = c_1x + c_0;\quad C' = c_1 \\ D = d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0;\quad D^{III} = 6d_3\ . \end{cases} \tag{30}$$

С учетом (30) из (29):

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{rr} = \frac{a_1}{r^2} + 2(2\nu-1)c_1 + 6\nu d_3 \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = -\frac{a_1}{r^2} + 2(2\nu-1)c_1 + 6\nu d_3 \\ \bar{\sigma}_{xx} = 4(2-\nu)c_1 + (1-\nu)6\nu d_3\ . \end{cases} \tag{31}$$

Из (19):

$$\begin{cases} \bar{u}_r = -\frac{1+\nu}{E}\left(a_1\frac{1}{r} + 2c_1r\right) \\ \bar{u}_x = \frac{1+\nu}{E}\left[8(1-\nu)c_1 + (1-2\nu)6d_3\right]\cdot z + \frac{1+\nu}{E}\left[8(1-\nu)c_0 + (1-2\nu)2d_2\right]. \end{cases} \tag{32}$$

При $x = 0,\ \bar{u}_x = 0$ следовательно:

$$\frac{1+\nu}{E}\left[8(1-\nu)c_1+(1-2\nu)2d_2\right]=0 \tag{33}$$

и

$$\bar{u}_x=\frac{1+\nu}{E}\left[8(1-\nu)c_1+(1-2\nu)6d_3\right]\cdot x. \tag{34}$$

Цилиндр сжимается силой F так, чтобы, расширяясь закрывает зазор между цилиндром в жестким внешним цилиндром, при этом и на внешней и на внутренней поверхностях резинового цилиндра выполняются условия:

$$\sigma_{rr}(r_2)=0;\quad \sigma_{xx}=-\frac{F}{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}=-P;\quad \sigma_{rr}(r_1)=0. \tag{35}$$

Из условий (35) получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{r_1^2}+2(2\nu-1)c_1+6\nu d_3=P_1\\ \dfrac{a_1}{r_2^2}+2(2\nu-1)c_1+6\nu d_3=0\\ 4(2-\nu)c_1+(1-\nu)6\nu d_3=-P\ ,\end{cases} \tag{36}$$

где $P_1$ – неизвестное давление на внутренней поверхности резинового цилиндра, которое можно выразит через E и геометрические размеры следующим образом. Формулы (14) являются решениями задачи Ламе, с другой стороны, известно, что:

$$\sigma_{rr}=\frac{r_1^2r_2^2\left(p_2-p_1\right)}{r_2^2-r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{r_1^2p_1-r_2^2p_2}{r_2^2-r_1^2}.$$

Из (36):

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{r_1^2r_2^2P_1}{r_2^2-r_1^2}\\ &c_1=-\frac{(1-\nu)\left[\dfrac{r_1^2P_1}{r_2^2-r_1^2}-\dfrac{(2\nu-1)P_1}{2(2-\nu)}\right]}{4\left[\dfrac{(2\nu-1)(1-\nu)}{2-\nu}-1\right](2-\nu)}-\frac{P}{4(2-\nu)}\\ &6\nu d_3=\frac{\dfrac{r_1^2P_1}{r_2^2-r_1^2}-\dfrac{(2\nu-1)P}{2(2-\nu)}}{\dfrac{(2\nu-1)(1-\nu)}{2-\nu}-1}\end{aligned}\right\}. \tag{37}$$

Если считать, что ν << 0,5 из (37) получаем:

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{r_1^2r_2^2P_1}{r_2^2-r_1^2}\\ &c_1=-\frac{r_1^2P_1}{12\left(r_2^2-r_1^2\right)}-\frac{P}{\sigma}\\ &d_3=-\frac{r_1^2P_1}{3\left(r_2^2-r_1^2\right)}\end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Из (17) для напряжений получаем:

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^0+\bar{\sigma}_{rr};\quad \sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\varphi\varphi}^0+\bar{\sigma}_{\varphi\varphi};\\ \bar{\sigma}_{xx}=\dfrac{-F}{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)}=-P\end{cases}.$$

Если обозначим зазор между жестким внешним цилиндром и деформируемым цилиндром через $\bar{\delta}$, то из (32) и (37) при $r = r_2,\ \bar{u}_r = \bar{\delta}$ и

$$P = \frac{7r_1^2}{2(r_2^2 - r_1^2)}P_1 + 2E\frac{\bar{\delta}}{r_2}.(39)$$

Учитывая, что $P = F/\pi(r_2^2 - r_1^2)$ из (39) имеем:

$$F = \frac{7}{2}\pi r_1^2 P_1 + \frac{2E\pi(r_2^2 - r_1^2)\bar{\delta}}{r_2}.(40)$$

В (39) и (40):

$$\bar{\delta} = \delta - u_2(r_2), \quad (41)$$

где $\delta$ – зазор между недеформированным цилиндром и внешним жестким цилиндром. $u_2(r_2)$ определяется из (11). С учетом (13) из (11) для $u_2(r_2)$ получаем:

$$u_2(r_2) = \frac{r_1}{r_2}(r_0 - r_1). \quad (42)$$

С учетом (42), (41) имеет вид:

$$\bar{\delta} = \delta - \frac{r_1}{r_2}(r_0 - r_1). \quad (43)$$

Представляя (43) в (40) для сжимающей силы F получаем:

$$F = \frac{7}{2}\pi r_1^2 P_1 + \frac{2E\pi(r_2^2 - r_1^2)}{r_2}\left[\delta - \frac{r_1}{r_2}(r_0 - r_1)\right]. \quad (44)$$

При выполении условия (44) зазор $\delta$ закрывается в тот момент, когда на внутренней поверхности цилиндра давление равняется нулю. Это означает, что износ при трении практический будет равняться нулю. Таким образом при выполнении условия (44) и герметичност обеспечивается и износ при трении будет минимальным.

**Литература**

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М. : Издательство «Высшая школа», 1976. – 287 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1971. – Изд. 4-е. – 576 с.
3. Гулгазли А.С., Алиев А.М. Модель количественной оценки износа при трении. Оборудования, Технология, Металлы. – Баку : Издательство АГУНП, 2019. – № 2. – С. 25–35.

**References**

1. Amenzade Y.A. The theory of elasticity. – M. : «Higher School» Publishing House, 1976. – 287 p.
2. Kamke E. A Handbook of Ordinary Differential Equations. – M. : Nauka, 1971. – Published in the 4th century. – 576 p.
3. Gulgazli A.S., Aliyev A.M. The model for quantitative estimation of friction wear. Equipment, Technology, Metals. – Baku : AGUNP Publishing House, 2019. – № 2. – P. 25–35.