



УДК 622.276.5+622.297.5 (072.8)

**ГИДРОДИНАМИКА СИСТЕМЫ ТЕРМАЛЬНЫХ СКВАЖИН
В ГЕТЕРОГЕННОМ НЕОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ**



**THE HYDRODYNAMICS OF THE SYSTEM -THERMAL WELLS
IN A HETEROGENEOUS UNLIMITED LAYER**

Шарнов Александр Иванович

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры машин и оборудования
нефтяных и газовых промыслов,
Армавирский механико-технологический
институт (филиал),
Кубанский государственный
технологический университет
a.i.sharnov@mail.ru

Sharnov Alexander Ivanovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Department
of machinery and equipment
of oil and gas fields,
Armavir Institute of mechanics
and technology (branch),
Kuban State University of Technology
a.i.sharnov@mail.ru

Аннотация. Представлено решение задачи упругой фильтрации теплоносителя для системы из двух скважин в гетерогенном пласте.

Annotation. A solution to the problem of elastic filtration of a coolant for a system of two wells in a heterogeneous formation is presented.

Ключевые слова: фильтрация, жидкость, горизонтальный, пласт, гетерогенный, скважина, дебит, гидродинамика, система, циркуляция.

Keywords: filtration, liquid, horizontal, reservoir, heterogeneous, well, flow rate, hydrodynamics, system, circulation.

Важной задачей в комплексе тепловых методов увеличения нефтеотдачи продуктивных пластов является исследование гидродинамики подземных циркуляционных систем [1].

Использование модели гетерогенной, в частности, трещиновато-пористой среды [2, 3] для изучения динамики фильтрационных потоков тепловых циркуляционных систем дает возможность получить более точную картину реального физического процесса, происходящего в пласте.

Рассмотрим циркуляционную систему, состоящую из добывающей и нагнетательной скважин в неограниченном трещиновато-пористом пласте. Нагнетательную скважину моделируем как линейный непрерывный источник с постоянным расходом Q_n . Добывающую скважину представим в форме цилиндра с радиусом r_0 , на стенках которого поддерживает постоянное давление P_3 .

Так как область фильтрации не ограничена, то задачу можно считать плоской, а давление – функцией расстояния r , угла θ и времени t (рис. 1).

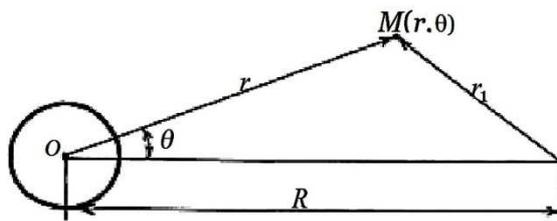


Рисунок 1

Введем безразмерные переменные $r = \frac{\bar{r}}{r_0}$, $Fo = \frac{\kappa t}{r_0^2}$ и неизвестную безразмерную функцию

$u = \frac{P - P_{пл}}{P_3}$, тогда математическая модель задачи в полярной системе координат (r, θ) имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial Fo} - \xi \frac{\partial}{\partial Fo} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \tag{1}$$

$$1 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, u(r, \theta, Fo) = u(r, \theta + 2\pi, Fo), Fo > 0.$$

$$u(r, \theta, 0) = 0, 1 \leq r \leq \infty; \tag{2}$$



$$u(Fo, \theta, \infty) = 0, \quad Fo \geq 0; \tag{3}$$

$$u(r, \theta, Fo)|_{r=1} = 1 - e^{-\frac{1}{\xi} Fo}, \quad Fo \geq 0; \tag{4}$$

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} r_1 \frac{\partial u}{\partial r_1} = -q \left(1 - e^{-\frac{1}{\xi} Fo} \right), \quad r_1 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}. \tag{5}$$

Здесь R – расстояние между скважинами.

Применяя к задаче (1)–(5) преобразование Лапласа по переменной Fo получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} - \delta^2 \bar{u}, \quad 1 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{6}$$

$$\bar{u}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \tag{7}$$

$$\bar{u}|_{r=1} = \frac{u_3}{\sigma(1 + \xi\sigma)}, \quad u = \frac{P - P_{nl}}{P_3}, \quad u_3 = \frac{P_3 - P_{nl}}{P_3}, \tag{8}$$

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} r_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r_1} = -\frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)}, \quad r_1 = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}. \tag{9}$$

Применяя метод разделения переменных, запишем решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности (7), в виде следующего ряда с произвольным коэффициентом α_k :

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k K_k(\delta r) \cos k\theta. \tag{10}$$

С другой стороны, фундаментальное решение уравнения (6) имеет вид:

$$V = \frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)} K_o(\delta r_1). \tag{11}$$

и удовлетворяет уравнению (6) и условию (9).

Согласно теореме сложения для функций Бесселя соотношение (11) можно записать в виде:

$$V = \begin{cases} \frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\delta r) K_k(\delta R) \cos k\theta, & r \leq R; \\ \frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\delta R) K_k(\delta r) \cos k\theta, & r > R, \end{cases} \tag{12}$$

где $\varepsilon_k = 1$ при $k = 0$; $\varepsilon_k = 2$ при $k = 1, 2, 3, \dots$

Искомое изображение $\bar{u}(r, \theta, \sigma) = V(r, \theta, \sigma) + W(r, \theta, \sigma)$ можно теперь записать в виде:

$$\bar{u} = \begin{cases} \frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k [I_k(\delta r) K_k(\delta R) + \alpha_k K_k(r\delta)] \cos k\theta, & r \leq R; \\ \frac{q}{\sigma(1 + \xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k [I_k(\delta R) K_k(\delta r) + \alpha_k K_k(r\delta)] \cos k\theta, & r > R. \end{cases} \tag{13}$$

Определяя коэффициенты α_k из граничных условий (7)

$$\alpha_k = \begin{cases} -\frac{I_k(\delta) K_k(\delta R)}{K_k(\delta)}, & k = 0; \\ \frac{u_3 - I_0(\delta) K_0(\delta R)}{K_0(\delta)}, & k \neq 0, \end{cases}$$

получаем:



$$\bar{u} = \frac{u_3}{\sigma(1+\xi\sigma)} \frac{K_0(\delta r)}{K_0(\delta)} + \begin{cases} \frac{q}{\sigma(1+\xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \frac{K_k(R\delta)}{K_k(\delta)} [I_k(\delta r)K_k(\delta) - I_k(\delta)K_k(r\delta)] \cos k\theta, & r \leq R; \\ \frac{q}{\sigma(1+\xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \frac{K_k(R\delta)}{K_k(\delta)} [I_k(\delta R)K_k(\delta) - I_k(\delta)K_k(R\delta)] \cos k\theta, & r > R. \end{cases} \quad (14)$$

Для нахождения оригинала по изображению $u(r, Fo)$ воспользуемся теоремой Фурье-Меллина, согласно которой:

$$u = \frac{u_3}{2\pi i} \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} e^{\sigma Fo} \frac{K_0(\delta r)}{K_0(\delta)} \frac{d\sigma}{\sigma(1+\xi\sigma)} + \frac{q}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cos k\theta \int_{j-i\infty}^{j+i\infty} \frac{K_k(\delta R)}{K_k(\delta)} \cdot \frac{I_k(r\delta)K_k(\delta) - I_k(\delta)K_k(r\delta)}{\sigma(1+\xi\sigma)} e^{\sigma Fo} d\sigma, \quad r \leq R. \quad (15)$$

Для вычисления интеграла по формуле (15) выбираем криволинейный контур, приведенный на рисунке 2 [6].

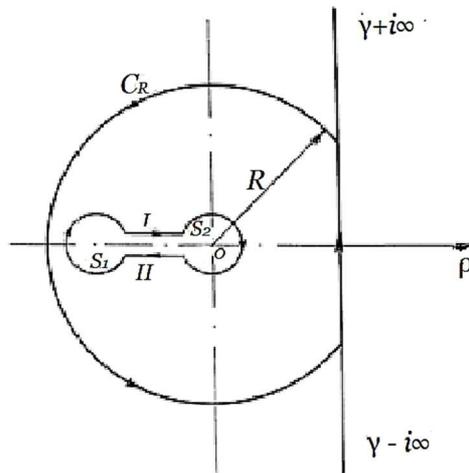


Рисунок 2

Учитывая, что подынтегральная функция не имеет особых точек внутри области, ограниченной выбранным контуром, получим решение задачи (6) – (9) в виде

$$u = u_3 - 2q \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cos k\theta \int_0^{b^2} \frac{A_k C_k [1 - \exp(-\rho Fo)]}{C_k (1 - \xi \rho) \rho} d\rho - \frac{2u_3}{\pi} \int_0^{b^2} \frac{B_0 [1 - \exp(-\rho Fo)]}{C_0 (1 - \xi \rho) \rho} d\rho + \begin{cases} q \left[\ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kR^k} \left(r^k - \frac{1}{r^k} \right) \cos k\theta \right], & r \leq R, \\ q \left[\ln R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kR^k} \left(R^k - \frac{1}{R^k} \right) \cos k\theta \right], & r > R. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} A_k &= J_k(u)Y_k(u) - J_k(u)Y_k(u); \\ B_k &= J_k(u)Y_k(ru) - J_k(ru)Y_k(u); \\ C_k &= J_k^2(u) + J_k^2(u). \end{aligned}$$

Замечая, что:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k \cos kx}{k} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2p \cos x + p^2}}, \quad p^2 \ll 1,$$



выражение, стоящее в квадратных скобках (16) можно записать в виде:

$$\frac{q}{2} \ln \frac{R^2 r^2 - 2Rr \cos \theta + 1}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}.$$

Таким образом, окончательно решение задачи (6)–(9) примет вид:

$$u_i = u_s - 2q \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cos k\theta \int_0^{b^2} \frac{A_k C_k \Phi_i(\rho, Fo)}{C_k (1 - \xi\rho)\rho} d\rho - \frac{2u_s}{\pi} \int_0^{b^2} \frac{B_0 \Phi_i(\rho, Fo)}{C_0 (1 - \xi\rho)\rho} d\rho + \frac{q}{2} \ln \frac{R^2 r^2 - 2Rr \cos \theta + 1}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}, \tag{17}$$

$$\Phi_1(\rho, Fo) = 1 - (1 - \xi\rho) e^{-\rho Fo},$$

$$\Phi_2(\rho, Fo) = 1 - e^{-\rho Fo}.$$

$$Q_s = \frac{2hk_0 P_s}{\mu} \int_0^{\pi} \left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=1} d\theta. \tag{18}$$

Градиент давления на эксплуатационной скважине определяем из (17) для давления в трещинах. Дебит эксплуатационной скважины будет определяться по формуле:

$$Q_s = \frac{2Q_n}{\pi} \int_0^{b^2} \frac{A_0 [1 - e^{-\rho Fo} (1 - \xi\rho)]}{C_0 (1 - \xi\rho)\rho} d\rho + Q_n + \frac{4hk_0 P_s}{\mu} \int_0^{b^2} \frac{D_0 [1 - e^{-\rho Fo} (1 - \xi\rho)]}{C_0 (1 - \xi\rho)\rho} d\rho, \tag{19}$$

где $D_0 = J_1(u)Y_0(u) - J_0(u)Y_1(u)$.

Разность расходов на эксплуатационной и нагнетательной скважинах дает объем утечек δ_y теплоносителя за пределы циркуляционной системы:

$$\delta_y = \frac{Q_n - Q_s}{Q_n}.$$

По формуле (19) были проведены численные расчеты. Результаты их приведены в виде графиков. На рисунке 3 представлен график динамики утечек теплоносителя из циркуляционной системы во времени Fo при различных параметрах системы. С увеличением Fo и уменьшением R , величина утечек теплоносителя из циркуляционной системы уменьшается.

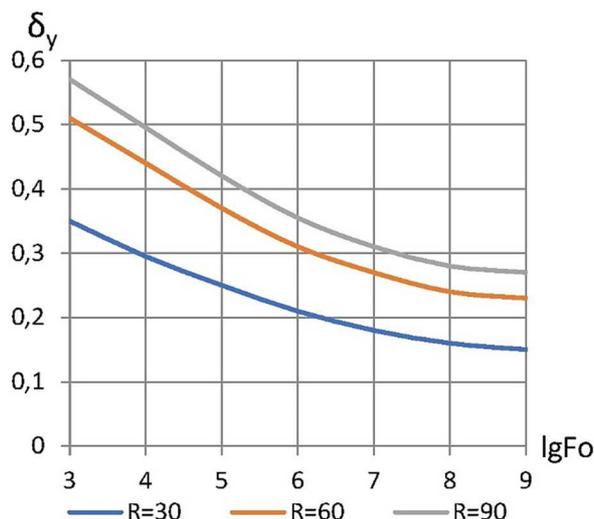


Рисунок 3 – График динамики утечек теплоносителя из циркуляционной системы во времени Fo

Рассмотренный метод решения задачи упругой двумерной фильтрации теплоносителя в трещиновато-пористом пласте применительно к циркуляционной системе из двух скважин может быть распространен на циркуляционные системы, состоящие из центральной эксплуатационной скважины конечного радиуса и произвольного количества и расположения нагнетательных скважин.



Пусть m равнодебитных нагнетательных скважин с суммарным дебитом Q расположены симметрично вокруг эксплуатационной скважины по окружности радиуса R .

В этом случае граничное условие (10) запишется в виде:

$$\lim_{r_k \rightarrow 0} r_k \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial r_k} = -q_1, \quad q_1 = \frac{Q}{m}, \quad (20)$$

где

$$r_k = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \left[\frac{2\pi(k-1)}{m} - \theta \right]}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Выполняя аналогичные выкладки, получим решение задачи в изображениях для случая m равнодебитных нагнетательных скважин:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{K_0(r\delta)u_3}{\sigma(1+\xi\sigma)K_0(\delta)} + \\ &+ \begin{cases} \frac{qm}{\sigma(1+\xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \frac{K_{km}(R\delta)}{K_{km}(\delta)} [I_{km}(r\delta)K_{km}(\delta) - I_{km}(\delta)K_{km}(r\delta)] \cos km\theta, & r \leq R \\ \frac{qm}{\sigma(1+\xi\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \frac{K_{km}(r\delta)}{K_{km}(\delta)} [I_{km}(R\delta)K_{km}(\delta) - I_{km}(\delta)K_{km}(R\delta)] \cos km\theta, & r > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

После обращения его получим решение поставленной задачи в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= u_3 - \frac{2u_3}{\pi} \int_0^{b^2} \frac{C_0 \Phi_i(\rho, Fo)}{D_0(1-\xi\rho)\rho} d\rho - qm \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{b^2} \frac{B_{km} C_{km} \Phi_i(\rho, Fo) \cos km\theta}{D_{km}(1-\xi\rho)\rho} d\rho + \\ &+ \frac{q}{2} \ln \frac{(Rr)^{2m} - 2(Rr)^m \cos m\theta + 1}{R^{2m} - 2(Rr)^m \cos m\theta + r^{2m}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Дебит эксплуатационной скважины определяется по формуле:

$$Q_3 = \frac{2hk_0 P_3 m}{\mu} \int_0^{\pi} \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r_1} d\theta. \quad (23)$$

Как показали исследования, величина \bar{d}_y не зависит от m , т.е. при неизменном суммарном дебите нагнетательных скважин их количество не влияет на величину утечек теплоносителя за пределы циркуляционной системы.

Литература

1. Черняк Б.П., Мерзляков Э.И., Рыженко И.А., Степко В.В. Фильтрация и теплоперенос в подземной циркуляционной системе, образованной в природном коллекторе // Динамика многофазных сред. – Изд. ИТПМ СО АН СССР, 1983. – С. 304–313.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых породах // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 852–864.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Основные уравнения фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ДАН СССР. – 1960. – Т. 132. – № 3. – С. 545–548.
4. Шарнов А.И. Постановка задач плоскорадиальной фильтрации в гетерогенном по проницаемости трещиновато-пористом пласте // В книге: Наука и технологии в нефтегазовом деле. Тезисы докладов Международной научно-практической конференции, посвященная 100-летию Кубанского государственного технологического университета и 25-летию кафедры машин и оборудования нефтяных и газовых промыслов Армавирского механико-технологического института. – Краснодар : Изд-во КубГТУ, 2018. – С. 156–158.
5. Шарнов А.И. Фильтрация к скважине в гетерогенном пласте двойной пористости // Булатовские чтения. – 2018. – Т. 2. – Ч. 2. – С. 222–231.
6. Шарнов А.И. Фильтрация в горизонтальном гетерогенном по проницаемости пласте к несовершенной скважине с постоянным дебитом // Булатовские чтения. – 2019. – Т. 2. – С. 218–224.

References

1. Chernyak B.P., Merzlyakov E.I., Ryzenko I.A., Stepko V.V. Filtration and heat transfer in an underground circulation system formed in a natural reservoir // Dynamics of multiphase media. Ed. ITPM SO as USSR, 1983. – P. 304–313.
2. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. On the main concepts of filtration theory in fractured rocks // Applied. Mat. I mech. – 1960. – Vol. 24. – № 5. – P. 852–864.



3. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P. Basic equations of filtration of homogeneous liquids in fractured rocks // DAN USSR. – 1960. – Vol. 132. – № 3. – P. 545–548.
4. Sharnov A.I. Setting the problems of plane-radial filtration in a heterogeneous fractured-porous reservoir with respect to permeability // In the book: Science and technology in the oil and gas industry. Abstracts of the International scientific and practical conference dedicated to the 100th anniversary of the Kuban state technological University and the 25th anniversary of the Department of machinery and equipment of oil and gas fields of the Armavir Institute of mechanics and technology. – Krasnodar : KubSTU Publishing House, 2018. – P. 156–158.
5. Sharnov A.I. Filtration to a well in a heterogeneous double porosity formation // Bulatov readings. –2018. – Vol. 2. – Part 2. – P. 222–231.
6. Sharnov A.I. Filtration in a horizontal heterogeneous reservoir to an imperfect well with a constant flow rate // Bulat readings. – 2019. – Vol. 2. – P. 218–224.