УДК 681.513.2

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА ПРОПИЛЕНГЛИКОЛЯ

–––––––

DEVELOPMENT OF LAGRANGIAN METHOD FOR OPTIMIZATION OF TECHNOLOGICAL PROCESS OF PRODUCTION OF PROPYLENE GLYCOL

Сафарова Айгюн Агамирза кызы
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры управления и инженерии систем,
Азербайджанский государственный
университет нефти и промышленности
aygsafa@rambler.ru

Магеррамова Тамелла Мустафа кызы
Кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры управления и инженерии систем,
Азербайджанский государственный
университет нефти и промышленности
tamellatm@gmail.com

Аннотация. Анализ математических моделей, характеризующих количество и удельный вес пропиленгликоля в технологическом процессе производства пропиленгликоля, показал, что зависимости, описывающие данные модели являются выпуклыми функциями. Принимая во внимание этот аспект, предпочтение дано использованию метода Лагранжа для решения задачи оптимального управления. При решении задачи исследуется выпуклость целевой функции. На основе метода Лагранжа определяются необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа. С помощью метода искусственного базиса находятся координаты седловой точки функции Лагранжа. На основе алгоритма оптимального решения исходной задачи определяется значение целевой функции.

Ключевые слова: пропиленгликоль, функция Лагранжа, метод искусственного базиса, оптимальное решение.

Safarova Aygun Agamirza
PhD, Associate Professor,
Associate Professor of Control
and engineering systems,
Azerbaijan State University
of Oil and Industry
aygsafa@rambler.ru

Magerramova Tamella Mustafa
PhD, Associate Professor,
Associate Professor of Control
and engineering systems,
Azerbaijan State University
of Oil and Industry
tamellatm@gmail.com

Annotation. Analysis of mathematical models characterizing the amount and specific gravity of propylene glycol in the process of production of propylene glycol showed that these models are effective. Therefore, taking into account this aspect, it was preferable to use the Lagrange method for solving the problem of optimal control. When solving the problem, the convexity of the objective function is investigated. Based on the Lagrange method, it is possible to obtain sufficient conditions for conditional extremum using an artificial base method to find the finding of saddle points of the Lagrange function. Using an artificial base method, the coordinates of the saddle points of the Lagrange function are found. Based on the algorithm for optimally solving.

Keywords: propylene glycol, artificial method of Lagrange function for the base, optimal solution.the original problem, the value of the objective function is determined.

В условиях рыночной экономики с точки зрения производства продукта является одним из основных технологических процессов.

Пропиленгликоль является основным и широко используемым продуктом в пищевой промышленности, в химических и гидравлических системах в качестве рабочей жидкости, полуэфирной смолы для получения жидкого антифриза и в изготовлении косметических продуктов.

Как конечный продукт, пропиленгликоль пользуется большим спросом как в внутри республики, так и на зарубежном рынке. Технологический процесс производства пропиленгликоля состоит из смесителя (Q), обеспечивающего смешение водного конденсата с оксидом пропилена, гидратора (H), осуществляющего получение пропиленгликоля, трех параллельно работающих испарителей, организующих конденсацию парового конденсата из продукта реакциии двух последовательно соединенных ректификационных колонн (R) для ректификации парового конденсата из пропиленгликоля.

В технологическом процессе производства пропиленгликоля его основные технологические аппараты объединяются в схему с последовательными и обратными связями. Простейшая схема технологической установки производствапропиленгликоляпоказана на рисунке 1.

В технологической системе получения пропиленгликоля, с точки зрения производства целевой продукции, основным является аппарат, обеспечивающий гидратацию оксида пропилена с водным конденсатом.

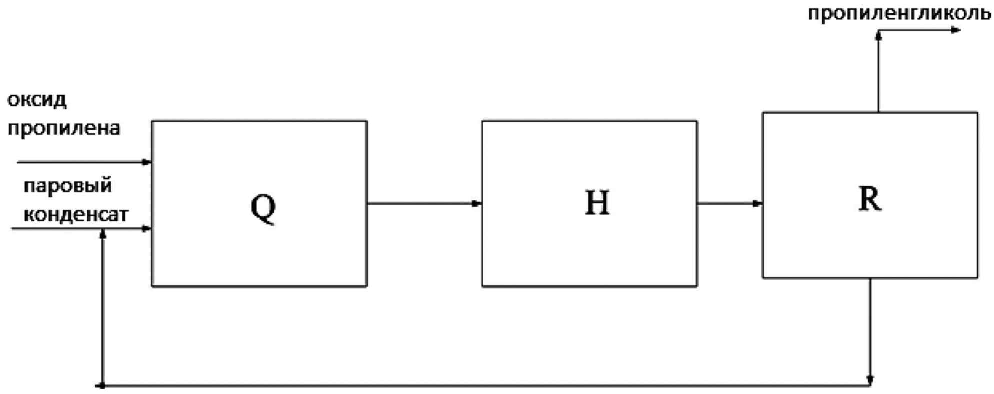

Рисунок 1 – Простейшая схема технологической установки производства пропиленгликоля

Получение пропиленгликоля осуществляется в зависимости от температуры и давления в гидраторе. В то же время длительная эксплуатация технологического установки показала, что предъявляются серьезные требования как к количеству, так и к качеству получаемого на установке пропиленгликоля. Так, удельный вес товарного пропиленгликоля, производимого на рассматриваемой установке, должен находиться в пределах 0,981–1,036 г/см³ [1].

При заданном значении количества оксида пропилена как количество, так и удельный вес получаемого пропиленгликоля зависит от температуры и давления, поддерживающихся в гидраторе. Тогда, задачу оптимального управления можно записать в виде:

$$y = f \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2} \right) \to \max_{u \in U}, \tag{1}$$

$$0{,}981 \le G \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2} \right) \le 1{,}036 \,. \tag{2}$$

Ограничения же, накладываемые на входные и управляющие параметры:

$$\begin{cases} 11 \le P \le 15 \\ 160 \le T \le 180 \\ 500 \le F_2 \le 1000 \\ 2500 \le F_1 \le 6500 \\ 4 \le \dfrac{F_1}{F_2} \le 6, \end{cases} \tag{3}$$

где y – выход пропиленгликоля (м³/час), g – удельный вес пропиленгликоля (г/см³), P – давление в гидраторе (кг/см²) hidratorda təzyiq, T – температура в гидраторе (°C), F_1 – количество водного конденсата, подаваемого на смешение (м³/час), F_2 – количество оксида пропилена, подаваемого на смешение (м³/час).

Принимая во внимание вышесказанное, задачу оптимального управления гидратором можно сформулировать следующим образом: при заданном значении количества оксида пропилена $\left(F_2^0\right)$ и выполнении ограничительных условий в смесителе, необходимо определить такие значения температуры, давления и отношения $\frac{F_1}{F_2}$, чтобы при соблюдений условий ограничений (2) и (3) обеспечить получение максимума пропиленгликоля.

В общем случае функцию Лагранжа для решения задачи выпуклого программирования (1)–(3) можно представить в нижеследующем виде:

$$L \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6 \right) = f \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2} \right) + \lambda_1 \left[G \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2} \right) - 0{,}981 \right] +$$
$$+ \lambda_2 \left[1{,}036 - G \cdot \left(P, T, \frac{F_1}{F_2} \right) \right] + \lambda_3 [180 - T] + \lambda_4 [T - 160] + \lambda_5 [15 - P] + \lambda_6 [P - 11], \tag{4}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ – называются множителя Лагранжа [2].

Как известно, с помощью метода Лагранжа решение задачи (1)–(3) сводится к нахождению координат седловой точки функции Лагранжа (4) [3].

Если для всех аргументов $P, T, \frac{F_1}{F_2}$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$ функции (4) выполняются нижепредставленные ограничения, то точка $\left\{P^0, T^0, \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_6^0\right\}$ называется седловой точкой функции Лагранжа:

$$L\cdot\left(P, T, \frac{F_1}{F_2}, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_6^0\right) \le L\cdot\left(P^0, T^0, \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_6^0\right) \le L\cdot\left(P^0, T^0, \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6\right). \quad (5)$$

Если функции f и G непрерывные и непрерывнодиференцируемы, тогда необходимые и достаточные условия для функции Лагранжа в соответствии с теоремой Куна-Таккера можно представить следующими аналитическими выражениями [1]:

$$\frac{\partial L_0}{\partial P} \le 0; \quad (6)$$

$$P^0 \frac{\partial L_0}{\partial P} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial T} \le 0; \quad (8)$$

$$T^0 \frac{\partial L_0}{\partial T} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} \le 0\left(i = \overline{1{,}6}\right); \quad (10)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} = 0\left(i = \overline{1{,}6}\right); \quad (11)$$

$$\lambda_i^0 \ge 0\left(i = \overline{1{,}6}\right), \quad (12)$$

где $\frac{\partial L_0}{\partial P}$, $\frac{\partial L_0}{\partial T}$ и $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} \le 0\left(i = \overline{1{,}6}\right)$ соответственно значения частных производных функции Лагранжа, вычисленные в седловой точке.

Ясно, что если функция $L\cdot\left(P, T, \frac{F_1}{F_2}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6\right)$ имеет седловую точку $\left\{P^0, T^0, \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_6^0\right\}$, то в этой точке удовлетворяются условия (6)–(12).

Для решения поставленной задачи неравенства (6), (8) и (10) необходимо преобразовать в равенства. Для этого, внеся новые неотрицательные переменные $\vartheta_j\left(j = \overline{1{,}2}\right)$ и $w_i\left(i = \overline{1{,}6}\right)$ выражения (6)–(12) можно записать нижеследующим образом:

$$\frac{\partial L_0}{\partial P} + \vartheta_1 = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial T} + \vartheta_2 = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} - w_i = 0\left(i = \overline{1{,}6}\right); \quad (15)$$

$$P^0 \vartheta_1 = 0; \tag{16}$$

$$T^0 \vartheta_2 = 0; \tag{17}$$

$$\lambda_i^0 w_i = 0 \left(i = \overline{1,6}\right); \tag{18}$$

$$\lambda_i^0 \geq 0;\ \vartheta_i \geq 0;\ w_j \geq 0 \left(i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,6}\right). \tag{19}$$

Таким образом, для решения задачи выпуклого программирования (1)–(3) необходимо определить неотрицательное решение системы линейных уравнений (13)–(15), удовлетворяющее условиям (16)–(18). Это решение можно найти с помощью метода искусственного базиса [1, 2]. Так, в этом случае, решение системы линейных уравнений, учитывая выражения (15)–(18) при выполнении условий (13), (14), (15) и (19) сводится к нахождению максимального значения функции:

$$F = -M \sum_i z_i\ , \tag{20}$$

где z_i – внесенные в уравнения (13), (14) и (15) искусственные переменные, M – достаточное большое положительное число, его значение обычно не задается.

Решение вышепоставленной задачи с помощью метода искусственного базиса основывается на переходе от одного опорного плана к другому. В этом случае на каждой итерации значение целевой функции приближается к своему экстремальному значению. Отмеченный переход возможен при существовании какого-либо одного первоначального опорного плана. При решении поставленной задачи для формирования первоначального опорного плана, в первую очередь, одним из важных условий, является наличие единичных матриц по количеству уравнений, входящих в условие ограничений.

Преимущество метода искусственного базиса от Симплекс-метода заключается в том, что решая задачу с помощью этого метода и внеся в систему уравнений новые искусственные переменные всегда можно будет сформировать первоначальный план.

Следовательно, нахождение оптимального решения с помощью метода искусственного базиса состоит из нижеследующих этапов:

- введя искусственные переменные в систему уравнений, строится расширенная задача;
- определяется первоначальный опорный план расширенной задачи;
- с помощью простейших вычислений Симплекс-метода искусственные векторы устраняются из базиса. В итоге, формируется первоначальный опорный план задачи.

Используя построенный опорный план задачи, применив Симплекс-метод, находим оптимальное решение первоначальной задачи [3].

Следует отметить, что анализ математических моделей, характеризующих количество и удельный вес пропиленгликоля в технологическом процессе производства пропиленгликоля показал, что построенные модели являются выпуклыми функциями. Поэтому, учитывая вышесказанное, при решении задачи оптимального управления предпочтение дано использованию метода Лагранжа.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи выпуклого программирования (1)–(3) с помощью метода Лагранжа состоит из нижеследующих шагов:

- исследуется выпуклость целевой функции;
- формируется функция Лагранжа (4);
- определяются частные производные функции Лагранжа по управляющим параметрам (P, T) имножителям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$;
- описываются необходимые и достаточные условия существования седловой точки на основе выражений(13)–(19) для функции Лагранжа;
- находятся координаты седловой точки функции Лагранжа, используя метод искусственного базиса;
- формируется оптимальное решение первоначальной задачи и определяется значение целевой функции.

Литература:

1. Эфендиев И.Р., Керимов Д.К., Магеррамова Т.М. Автоматизация технологических процессов отрасли. – Баку, 2016. – 205 с.
2. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. – М. : Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 440 с.
3. Рейзлин В.И. Численные методы оптимизации : учебное пособие / Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). – Изд-во ТПУ, 2011. – С. 33–36.

References:

1. Efendiev I.R., Kerimov D.K., Magerramova T.M. Automation of technological processes in the industry. – Baku, 2016. – 205 p.
2. Attetkov A.V., Galkin S.V., Zarubin V.S. Optimization methods. – M. : Bauman Moscow State Technical University, 2011. – 440 p.
3. Reislin V.I. Numerical optimization methods : textbook / National Research Tomsk Polytechnic University (TPU). – TPU, 2011. – P. 33–36.