



УДК 539.3

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА, ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО КОНЦАМИ

### STABILITY OF A DIRECT CORE FROM THE POROUS MATERIAL PIVOTALLY FIXED BY THE ENDS

**Гулгезли А.С.**

доктор технических наук,  
доцент кафедры «механика»,  
Азербайджанский Государственный Университет  
Нефти и Промышленности  
alesker.gulgezli@mail.ru

**Ефендиев О.Ю.**

аспирант кафедры «механика»,  
Азербайджанский Государственный  
Архитектурно-Строительный Университет  
o.efendiyev@mail.ru

**Gulgezli A.S.**

Doctor of Engineering,  
associate professor of  
mekhanika department,  
Azerbaijani State University of  
Oil and Industry  
alesker.gulgezli@mail.ru

**Efendiyev O.Yu.**

Graduate Student of mekhanika department,  
Azerbaijani State Architectural  
and Construction University  
o.efendiyev@mail.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается задача о потере устойчивости прямого стержня с прямоугольным поперечным сечением. Концы стержня закреплены шарнирно. Материал стержня из пористого материала. Поэтому, связи деформациями и напряжениями являются нелинейными. Учитывается так же геометрическая нелинейность в одном из поперечных направлений. Таким образом задача является и физически и геометрически нелинейной, следовательно её решение связано с большими математическими трудностями. Для устранения эти трудности при решении задачи применен вариационный принцип. Эйлеровы уравнения предложенного функционала дают систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая решена с применением метода Рунге-Кутта четвертого порядка. Графически построены зависимости критических значений сжимающей силы от начального прогиба относительной толщины.

**Ключевые слова:** устойчивость, пористость, тонкостенность, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность, перемещение, деформация, напряжение.

**Annotation.** In article the task about loss of stability of a direct core with rectangular cross section is considered. The ends of a core are fixed pivotally. Core material from porous material. Therefore, communications by deformations and tension are nonlinear. Also geometrical nonlinearity in one of the cross directions is considered. Thus the task is and physically and geometrically nonlinear, therefore her decision is connected with great mathematical difficulties. The variation principle is applied to elimination these difficulties at the solution of a task. The Euler equations of the offered functionality give the system of the nonlinear differential equations which is solved with application of the Runge-Kutta method of the fourth order. Dependences of critical values of the squeezing force on an initial deflection of relative thickness are graphically constructed.

**Keywords:** stability, porosity, tonkostennost, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity, movement, deformation, tension.

**Постановка задачи.** Стержень постоянной толщины, из пористого материала, находится в вертикальном положении, причем верхняя опора свободна перемещается в вертикальном направлении и на него действует центрально-сжимающая сила  $P$ . Считается, что стержень тонкий. Температура и коэффициент Пуассона считаются постоянными. Требуется определить критическую силу, соответствующую потери устойчивости.

**Решение задачи.** Введем декартову систему координат  $oxuz$  так, чтобы ось  $x$  была направлена по оси стержня и проходила через центр тяжести поперечного сечения, а оси  $y$  и  $z$  напомним по главным осям инерции поперечного сечения.

Сделаем следующие предположения:

1. Геометрическая нелинейность имеет место только в направлении нормали (нормальную координату будем обозначать через  $-z$ ).
2. Учитывается гипотеза Кирхгофа-Лява, т.е. сечения, перпендикулярные к оси стержня до деформирования, остаются перпендикулярными к оси стержня и после деформирования.
3. В направлении оси  $y$  точки стержня не получают перемещения и остальные величины не зависят от  $y$ .
4. В направлении оси  $z$  толщина стержня равна единице.
5. Начало системы координат находится на серединной поверхности не деформированного стержня, длина стержня равна  $2l$ , причем  $-l \leq x \leq l$ .
6. В направлении оси  $z$  толщина стержня равна  $2h$ , причем  $-h \leq z \leq h$ .



Тогда компоненты тензора деформаций срединной поверхности и её изгиба выражаются через компоненты вектора перемещения на срединной поверхности следующим образом [4]:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varkappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $w$  – перемещения точек срединного слоя в направлении оси  $z$ ;  $\varepsilon(x, t)$ ,  $\varkappa(x, t)$  – соответственно, деформация и изменение кривизны на срединной поверхности стержня;  $t$  – время.

Уравнение равновесия с учетом геометрической нелинейности, связь между компонентами тензора деформаций и напряжений и граничные условия в декартовой системе координат имеют следующий вид [1, 3, 4]

$$[\sigma_{ij}(u_{\alpha,i} + \delta_{\alpha i})]_{,j} = 0. \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - k_0) \left( \frac{1+\nu}{E_{\text{сек}}} \sigma_{ij} - \frac{\nu I_1}{E_{\text{сек}}} \delta_{ij} \right). \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\delta_{\alpha i} + u_{\alpha,i}) \cdot n_j = \bar{N}_\alpha \text{ на } S_\sigma \\ u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_u \end{cases}. \quad (4)$$

где  $k_0 = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{I_1^2 + 2(1+\nu)I_2} - 1}; \quad (5)$

$\sigma_m$  – максимальное значение нормального напряжения;  $E_{\text{сек}}$  – секущий модуль упругости в момент разрыва, которые всегда можно определить из эксперимента на одноосное растяжение;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформации и напряжения;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $I_1, I_2$  – соответственно первый и второй инварианты тензора напряжений, запятые означает дифференцирование по координате с индексом, который следует после запятой;  $u_\alpha$  – компоненты вектора перемещений,  $n_j$  – компоненты вектора нормали,  $\bar{N}_i$  – заданные компоненты вектора поверхностных сил на  $S_\sigma$ ,  $\bar{u}_i$  – заданные перемещения на поверхности  $S_u$ , по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до 3.

Систему (3) перепишем следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1-k_0}{E_{\text{сек}}} \right) [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu \cdot I_1 \delta_{ij}]. \quad (6)$$

Введем следующее обозначение:

$$K = \frac{1-k_0}{E_{\text{сек}}}. \quad (7)$$

С учетом (7) в (6) имеем:

$$\varepsilon_{ij} = K[(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu I_1 g_{ij}]. \quad (8)$$

Предлагаемый функционал имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} J = \int_V \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{u}_{\alpha,j} \dot{u}_{\alpha,i} - \dot{\sigma}_{ij} [K((1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu I_1 \delta_{ij}) + K((1 + \nu)\dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{I}_1 \delta_{ij})] \right\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} \bar{N}_i \dot{u}_i ds + \int_{S_u} (\dot{u}_i - \bar{u}_i) \dot{N}_i ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где точка над величинами означает производную по времени;  $V$  – объем;  $S_u$  – площадь поперечного сечения стержня. При линейном напряженном состоянии  $\sigma_{11} = \sigma$  и остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Из системы (3) получается, что

$$\tilde{\varepsilon} = \left( \frac{1-k_0}{E_{\text{сек}}} \right) \tilde{\sigma}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{11}; \tilde{\sigma} = \sigma_{11};$

$$k_0 = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{\tilde{\sigma}^2} - 1}. \quad (11)$$

Из (9):

$$J = \int_V \left[ \dot{\tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma} \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 - \dot{\tilde{\sigma}} (K \tilde{\sigma} + K \dot{\tilde{\sigma}}) \right] dV - \int_{S_\sigma} \dot{P} u ds. \quad (12)$$



На основе известных соотношений, компонент тензора конечной деформации  $\tilde{\epsilon}$  в слое стержня, удаленном на расстоянии  $z$  от срединного слоя, имеет вид [3]:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + z\alpha . \tag{13}$$

Компонент тензора напряжений в произвольной точке стержня имеет вид [3]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2h}N(x, t) + \frac{3z}{2h^3}M(x, t),$$

где 
$$N(x, t) = \int_{-h}^h \tilde{\sigma} dz ; M(x, t) = \int_{-h}^h z \tilde{\sigma} dz . \tag{14}$$

Приравнявая первую вариацию (12) к нулю имеем:

$$\delta J = \int_V [\dot{\tilde{\sigma}} \delta \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \delta \dot{\tilde{\sigma}} + \tilde{\sigma} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - (\dot{K} \cdot \tilde{\sigma} + 2K \cdot \dot{\tilde{\sigma}}) \delta \dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{\sigma} \dot{\tilde{\sigma}} \delta \dot{K}] dV - \int_{S_\sigma} \dot{p} \delta u dS = 0 . \tag{15}$$

По условию стержень шарнирно закреплен по торцам, т.е. граничные условия можем записать в виде

$$w(x, \tau)|_{x=-l, l} = 0 ; M|_{x=-l, l} = 0 . \tag{16}$$

Исходя из граничных условий (16) и физических соображений, для прогиба  $w(x, \tau)$  примем следующую аппроксимацию:

$$w(x, \tau) = \varphi(\tau) \cdot \cos \frac{\pi x}{2l} , \tag{17}$$

где  $\varphi(\tau)$  – неизвестная функция времени. Для  $u(x, \tau)$  выберем следующую аппроксимацию:

$$u(x, \tau) = \psi(\tau)x , \tag{18}$$

где  $k(\tau)$  – неизвестная функция времени.

Тогда компоненты тензора скорости деформации срединной поверхности имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \dot{\psi}(\tau) + \frac{\pi^2}{4l^2} \cdot \varphi(\tau) \cdot \dot{\varphi}(\tau) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} \\ \dot{\kappa} &= \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -\frac{\pi^2}{4l^2} \dot{\varphi}(\tau) \cos \frac{\pi x}{2l} \end{aligned} \right\} . \tag{19}$$

Исходя из уравнения состояния (10) и физических соображений для  $N(x, t)$  и  $M(x, t)$  примем следующие аппроксимации:

$$N(x, t) = N_1(t) + N_2(t) \sin^2 \frac{\pi x}{2l} ; M(x, t) = M(t) \cos \frac{\pi x}{2l} , \tag{20}$$

где  $N_1(t), N_2(t), M(t)$  – неизвестные функции времени.

С учетом (17)–(20), (15) получает вид:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{-l}^l [\dot{N} \delta \dot{\epsilon} + \dot{M} \delta \dot{\kappa} + N \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \dot{\epsilon} - \frac{3}{2E} (4\dot{N}N - 2\dot{N}N_0 + \frac{3}{h^2} M\dot{M}) \right) \delta \dot{N} + \\ &+ \left( \dot{\kappa} - \frac{3}{h^2 E} (3\dot{N}M + 4N\dot{M} - 3N_0\dot{M}) \right) \delta \dot{M}] dx - 2h\dot{P} \cdot \delta \dot{u} = 0 , \end{aligned} \tag{21}$$

где  $E = hN_0 E_{сек}$ .

Подставим выражения для  $\dot{\epsilon}, \dot{\kappa}, \dot{N}, \dot{M}$  в (21). После вычисления интегралов,

$$\begin{aligned} \delta J &= (2\dot{N}_1 l + \dot{N}_2 l - 2hl\dot{P}) \delta \dot{\psi} + \left[ \frac{\pi^2}{4l} \cdot \varphi \left( \dot{N}_1 + \frac{3}{4} \dot{N}_2 \right) - \frac{\pi^2}{4l} \dot{M} + \frac{\pi^2}{4l} \dot{\varphi} (N_1 + \frac{3}{4} N_2) \right] \delta \dot{\varphi} + \\ &+ \left[ 2l\dot{\psi} + \frac{\pi^2}{4l} \varphi \dot{\varphi} - \frac{3l}{2E} (8N_1\dot{N}_1 + 4N_1\dot{N}_2 + 4\dot{N}_1 N_2 + 3N_2\dot{N}_2) - 4N_0\dot{N}_1 - 2N_0\dot{N}_2 + \right. \\ &+ \frac{3}{h^2} M\dot{M} \left. \right] \delta \dot{N}_1 + \left[ \dot{\psi} l + \frac{\pi^2}{16l} \varphi \dot{\varphi} - \frac{3l}{2E} (4N_1\dot{N}_1 + 3N_1\dot{N}_2 + 3\dot{N}_1 N_2 + 3N_2\dot{N}_2) - 2N_0\dot{N}_1 - \frac{3}{2} N_0\dot{N}_2 + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{4h^2} M\dot{M} \right] \delta \dot{N}_2 + \left[ -\frac{\pi^2}{4l^2} \dot{\varphi} l - \frac{3l}{h^2 E} \left( 3\dot{N}_1 M + 3\dot{N}_2 M \frac{1}{4} + 3N_1\dot{M} + \frac{3}{4} N_2\dot{M} - 3N_0\dot{M} \right) \right] \delta \dot{M} = 0 . \end{aligned} \tag{22}$$

Из-за независимости вариаций  $-\delta \dot{\psi}, \delta \dot{\varphi}, \delta \dot{N}_1, \delta \dot{N}_2$  и  $\delta \dot{M}$  все их коэффициенты должны равняться нулю. Таким образом, Эйлеравы уравнения функционала (12) будут, где введены следующие обозначения безразмерных величин:

$$n_1 = \frac{N_1}{hE_{сек}} ; n_2 = \frac{N_2}{hE_{сек}} ; n_0 = \frac{N_0}{hE_{сек}} ; p = \frac{P_0}{E_{сек}} ; f = \frac{\varphi}{l} ; m = \frac{M}{h^2 E_{сек}} ; \gamma = \frac{l}{h} . \tag{23}$$



$$\begin{cases} 2\dot{n}_1 + \dot{n}_2 - 2p = 0 \\ f(4\dot{n}_1 + 3\dot{n}_2) - 4\dot{m} + \dot{f}(4n_1 + 3n_2) = 0; \\ 16n_0\dot{\psi} + 2\pi^2 n_0 f \dot{f} - 3(8n_1\dot{n}_1 + 4n_1\dot{n}_2 + 4n_2\dot{n}_2 + 3\dot{n}_1 n_2) - \\ \quad 32\dot{n}_1 n_0 - 16n_0 + 24\gamma^2 m \dot{m} = 0 \\ 16n_0\dot{\psi} + \pi^2 n_0 f \dot{f} - 24(4n_1\dot{n}_1 + 3(n_1\dot{n}_2 + \dot{n}_1 n_2) + 3n_2\dot{n}_2) - \\ \quad 32\dot{n}_1 n_0 - 24\dot{n}_2 n_0 + 12\gamma^2 m \dot{m} = 0 \\ \pi^2 \gamma n_0 f + 9\gamma(4\dot{n}_1 m + \dot{n}_2 m + 4n_1 \dot{m} + n_2 \dot{m} - 4n_0 \dot{m}) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Начальные условия для системы (27) будут: При  $t = 0$ ;

$$f(0) = \bar{f}; \psi(0) = 0; n_1(0) = n_2(0) = n_{10}(0) = n_{20}(0) = m(0) = m_0(0) = 0,$$

где  $\bar{f}$  – безразмерный начальный прогиб стержня.

Система дифференциальных уравнений (27) с учетом начальных условий решена на ЭВМ методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Полученные результаты показаны на графиках. На рисунках даны зависимости  $p = p(\bar{\varphi})$  для различных значений  $\bar{\varphi}_0$  и  $\gamma$ . Изложим алгоритм, по которому решена система (55). Систему (55) перепишем в следующем виде.

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, y_3, \dots, y_7, t), \quad (25)$$

где  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

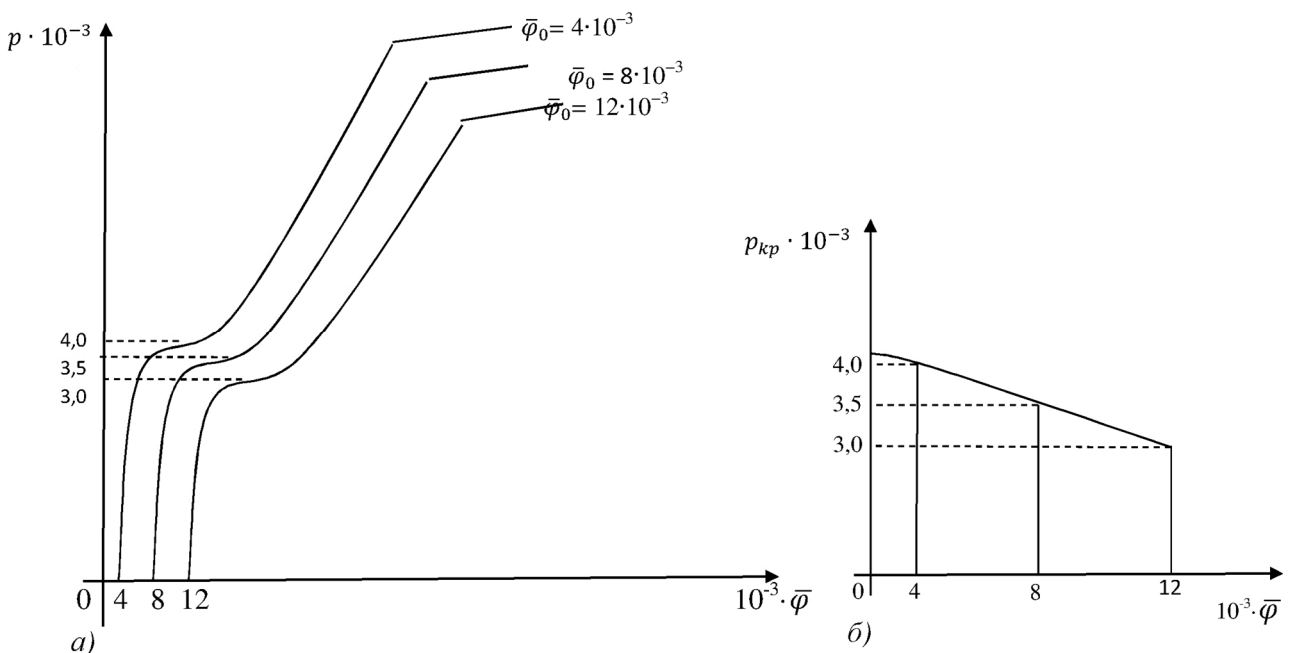
Если обозначить значения  $y_i (i = \overline{1,5})$  в  $n$ -ом шаге через  $y_i^n (i = \overline{1,5})$ , то на  $n + 1$ -ом шаге значения этих величин по методу Рунге-Кутты четвертого порядка будут следующие:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{H}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}),$$

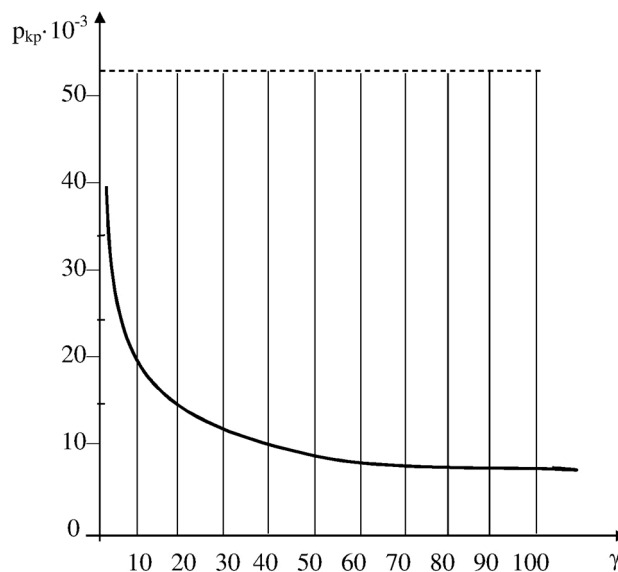
где  $H$  – длина шага,

$$\begin{aligned} k_{1i} &= f_i(y_1^n, y_2^n, \dots, y_7^n, t^n); \\ k_{2i} &= f_i\left(y_1^n + \frac{H}{2}k_{11}, y_2^n + \frac{H}{2}k_{12}, \dots, y_7^n + \frac{H}{2}k_{17}, t^n + \frac{H}{2}\right); \\ k_{3i} &= f_i\left(y_1^n + \frac{H}{2}k_{21}, y_2^n + \frac{H}{2}k_{22}, \dots, y_7^n + \frac{H}{2}k_{27}, t^n + \frac{H}{2}\right); \\ k_{4i} &= f_i\left(y_1^n + Hk_{31}, y_2^n + Hk_{32}, \dots, y_7^n + Hk_{37}, t^n + H\right); \end{aligned}$$

Ниже приводится зависимость  $p = p(\bar{\varphi})$  в различных значениях начального прогиба  $\bar{\varphi}_0$  (а) и  $p_{кр} = p_{кр}(\bar{\varphi}_0)$  (б) для прямого стержня при различных значениях относительной толщины  $\gamma$ .



**Рисунок 1** – Зависимость  $p = p(\bar{\varphi})$  в различных значениях начального прогиба  $\bar{\varphi}_0$  (а) и  $p_{кр} = p_{кр}(\bar{\varphi}_0)$  (б) для прямого стержня при  $\gamma = 100$



**Рисунок 2** – Зависимость критического момента выпучивания от относительной толщины стретня в данном значении начального прогиба

**Литература:**

1. Гасанов Р.А., Гулгазли А.С., Зейналов А.И. Общий вид уравнения состояния пористой среды // Азербайджанское Нефтяное Хозяйство. – 2016. – № 9. – С. 31–33.
2. Hasanov R.A., Vasylyev O., Smirnova A., Gulgazli A.S. Modeling design and analysis of multi-layer axide fuel cells inb. // J. Hydrogen Energi. – 2011. – V. 36. – № 2. – P. 1671–1682.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М. : Наука, 1972.
4. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М. : Высшая школа, 1976. – 275 с.
5. Ализаде А.Н., Гулгазли А.С. Вариационный принцип для определения напряженно-деформированного состояния упругой оболочки при облучении с учетом геометрической нелинейности // Изв. АН Азерб. ССР. Серия физ-тех. и матем. наук. – 1979. – № 6. – С. 84–87.

**References:**

1. Gasanov R.A., Gulgazli A.S., Zeynalov A.I. General view of the equation of a condition of the porous environment // Azerbaijani Oil Economy. – 2016. – № 9. – P. 31–33.
2. Hasanov R.A., Vasylyev O., Smirnova A., Gulgazli A.S. Modeling design and analysis of multi-layer axide fuel cells inb. // J. Hydrogen Energi. – 2011. – V. 36. – № 2. – P. 1671–1682.
3. Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and covers. – M. : Science, 1972.
4. Amenzade Yu.A. Theory of elasticity. – M. : The higher school, 1976. – 275 p.
5. Alizadeh A.N., Gulgazli A.S. The variation principle for definition of the intense deformed condition of an elastic cover at radiation taking into account geometrical nonlinearity // Izv. AS of Azerb. SSR. Series Physics and Technology faculty and mat. sciences. – 1979. – № 6. – P. 84–87.