



УДК 621.3+537.8

РАЗРАБОТКА ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ КАТУШКИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

DEVELOPMENT OF THE BASIC POSITIONS OF CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD OF COIL IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Еременко С.С.

Кубанский государственный технологический университет
ss.ereama@mail.ru

Попов Б.К.

Кубанский государственный технологический университет

Аннотация. В статье представлен метод расчёта электромагнитного поля катушки. На основании расчета электромагнитных полей для двухмерного случая, был разработан алгоритм, который позволил рассчитывать и строить электромагнитное поле в трёхмерном пространстве. В статье рассматривается подробное решение этой задачи.

Ключевые слова: ряд Фурье, катушка индуктивности, электромагнитное поле, вектор магнитного потенциала, вектор магнитной индукции.

Eremenko S.S.

Kuban State Technological University
ss.ereama@mail.ru

Popov B.K.

Kuban State Technological University

Annotation. In this article submitted the method of calculation of the electromagnetic field of the coil. On the basis of calculation of electromagnetic fields for a two-dimensional case, the algorithm which has allowed to count and build the electromagnetic field in three-dimensional space has been developed. In article the detailed solution of this task is considered.

Keywords: Fourier series, inductance coil, electromagnetic field, vector of magnetic potential, vector of magnetic induction.

Вывод уравнений для определения векторного магнитного потенциала \bar{A} для цилиндрической катушки в трёхмерной системе декартовых координат

В работах [1, 2] было определено основное направление в области разработки алгоритмов расчёта и программного обеспечения для построения электромагнитного поля электротехнических устройств.

Ранее были разработаны методы расчёта электромагнитных полей для двухмерного случая [3–6]. Разработанные алгоритмы позволили создать быстродействующие и эффективные программы, которые позволяли строить картины полей для разных конструкций. Расчёт на современном ПК занимал доли минуты. Результат расчётов был представлен в виде двухмерных рядов Фурье. Однако наиболее актуально строить и рассчитывать электромагнитное поле в трёхмерном случае. Это определяется тем, что двухмерная картина поля, используемая в расчётах электромагнитных устройств, связана с применением ряда упрощений исходной задачи. А это может вызывать определённые ошибки при проектировании электромагнитных и электромеханических устройств.

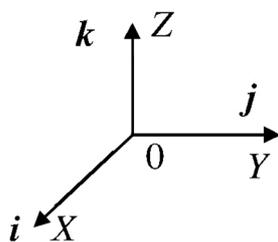


Рисунок 1

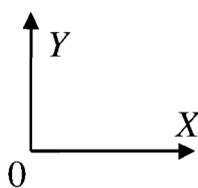


Рисунок 2

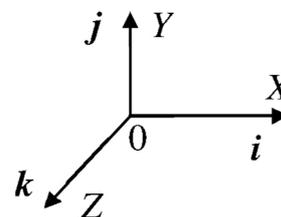


Рисунок 3

Для практической оценки возможности применения рядов Фурье в трёхмерном случае были разработаны алгоритмы и программное обеспечение для расчёта электромагнитного поля цилиндрической катушки в трёхмерном пространстве [7–10].

Решение было найдено для векторного магнитного потенциала в виде двух трёхмерных рядов Фурье [1].

Рассмотрим подробное решение этой задачи.

Общепринятое направление осей в декартовой системе координат показано на рисунке 1. Учитывая, что ранее для решения задач методом Роговского и Рота [5, 6] применялась двухмерная си-



стема координат, показанная на рисунке 2, то для сохранения большинства выводов применим трёхмерную систему координат с направлением осей, показанных на рисунке 3.

В этом случае сохраняется соответствие направлений осей на рисунках 1, 2, и 3. Рисунок 3 получается из рисунка 1 поворотом системы осей XYZ вокруг оси OY на 90° против часовой стрелки. Затем систему XYZ также поворачиваем вокруг оси OZ на 90° против часовой стрелки.

Будем рассматривать цилиндрическую катушку, помещённую в прямоугольную область (размером $l \times l \times d$) в сплошном ферромагнетике, с $\mu = \infty$ (см. рис. 4).

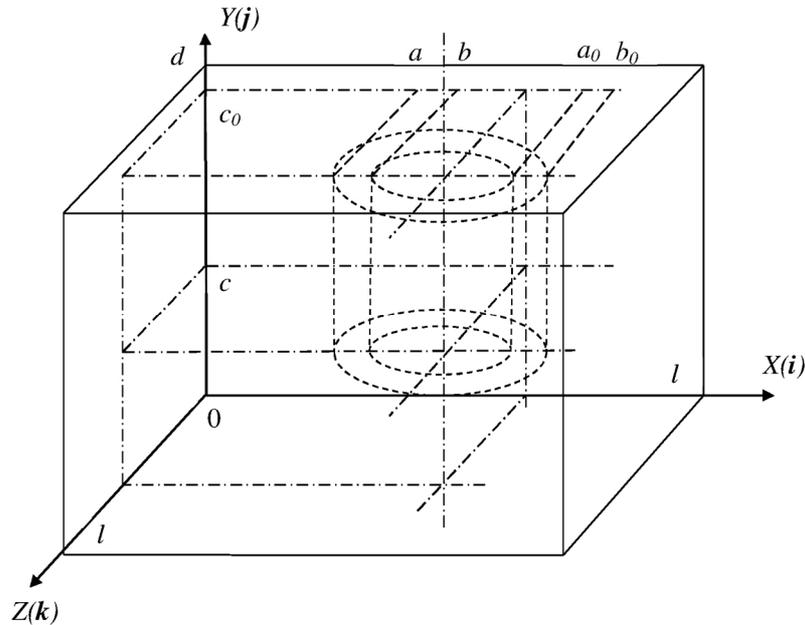


Рисунок 4

Выведем для такой катушки уравнения для вычисления векторного магнитного потенциала \bar{A} , который подчиняется выражению

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}, \tag{1}$$

где \bar{B} – вектор магнитной индукции.

Заметим, что вектор плотности тока параллелен плоскости ZOX и составляющих по оси Y не имеет. Следовательно, можно записать, что

$$\bar{\delta} = \bar{i}\delta_x + \bar{k}\delta_z. \tag{2}$$

В общем случае для однородной среды имеем уравнение

$$\text{rot rot } \bar{A} = \mu\mu_0\bar{\delta} = \mu_0\bar{\delta}. \tag{3}$$

Развернём это уравнение

$$\text{rot}_x \text{rot } \bar{A} = -\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = \mu_0\delta_x, \tag{4}$$

$$\text{rot}_z \text{rot } \bar{A} = -\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) = \mu_0\delta_z. \tag{5}$$

Так как δ_y отсутствует, то и составляющая $A_y = 0$. Следовательно, вектор \bar{A} имеет две составляющие, параллельные плоскости ZOX

$$\bar{A} = \bar{i}A_x + \bar{k}A_z. \tag{6}$$



Отсюда следует, что нахождение вектора \bar{A} в линейном пространстве разделяется на две независимые задачи, которые будем решать методом Рота.

Для катушки, расположенной, как показано на рисунке 4, будут иметь место следующие изменения координат X , Y и Z . Переменная X будет изменяться от 0 до l , Y будет изменяться от 0 до d , а Z будет изменяться от 0 до l .

Чтобы определить составляющие рядов Фурье, подчиняющиеся граничным условиям на поверхностях прямоугольной области раскроем выражение для $rot \bar{A}$

$$\bar{B} = rot \bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \bar{k}, \tag{7}$$

Проведём соответствующий анализ выражения (7).

Учитывая выражение (6), $A_y = 0$. Следовательно, (7) примет вид

$$\bar{B} = rot \bar{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \bar{k}. \tag{8}$$

Вывод формул для определения граничных условий векторного магнитного потенциала \bar{A} для цилиндрической катушки в трёхмерной системе декартовых координат

Рассмотрим плоскости параллельные плоскости ZOY (см. рис. 4). Нас интересуют плоскости с $x = 0$ и $x = l$.

На этих плоскостях тангенциальная составляющая вектора \bar{B} должна быть равна 0, то есть

$$B_{t_{x=0, x=l}} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \bar{k}. \tag{9}$$

Выполнение условия (9) возможно, когда все компоненты вектора B_t равняется 0, а именно

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j} = 0 \text{ и } \frac{\partial A_x}{\partial y} \bar{k} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \text{ и} \tag{10}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Аналогично, на плоскостях параллельных XOY (см. рис. 4) при $z = 0$ и $z = l$

$$B_{t_{z=0, z=l}} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \bar{j}, \tag{12}$$

что возможно при

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \text{ и} \tag{13}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{14}$$

На плоскостях параллельных ZOY (см. рис. 4) при $y = 0$ и $y = d$

$$B_{t_{y=0, y=d}} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \bar{k}, \tag{15}$$

а это выполняется при

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 \text{ и} \tag{16}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0. \tag{17}$$



Определение вида рядов Фурье для векторного магнитного потенциала \bar{A} цилиндрической катушки в трёхмерной системе декартовых координат с учётом граничных условий

Решение уравнений (4) и (5) будем находить в виде тройных рядов Фурье. Эти ряды будут содержать восемь компонент, из которых надо будет выбрать только те, которые будут подчиняться условиям (10), (11), (13), (14), (16), (17).

Представим A_x и A_y в виде рядов

$$A_x = \sum_{h,k,t} G_{1x} \cos m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{2x} \cos m_h x \sin n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{3x} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{4x} \sin m_h x \sin n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{5x} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{6x} \cos m_h x \sin n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{7x} \sin m_h x \cos n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{8x} \sin m_h x \sin n_k y \sin u_t z. \tag{18}$$

$$A_z = \sum_{h,k,t} G_{1z} \cos m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{2z} \cos m_h x \sin n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{3z} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{4z} \sin m_h x \sin n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{5z} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{6z} \cos m_h x \sin n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{7z} \sin m_h x \cos n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{8z} \sin m_h x \sin n_k y \sin u_t z. \tag{19}$$

Переменные m_h , n_k и u_t должны быть такими, чтобы при $x = 0, l$ $m_h = 0$ либо πh , при $y = 0, d$ $n_k = 0$ либо πk , при $z = 0, l$ $u_t = 0$ либо πt .

Рассмотрим условия (11) и (17).

В этом случае во всех членах ряда (18) с коэффициентами G_{1x} , G_{3x} , G_{5x} и G_{7x} $\cos n_k y$ станут $\sin n_k y$, а во всех членах ряда (18) с коэффициентами G_{2x} , G_{4x} , G_{6x} и G_{8x} $\sin n_k y$ станут $\cos n_k y$.

При $x = 0$ и $x = l$ члены ряда (18) с коэффициентами G_{3x} , G_{4x} , G_{7x} , G_{8x} станут равными 0, так как $\sin m_h x$ при этих x равняется 0. Чтобы выполнялось условие (11), необходимо выполнение условия

$$G_{1x} = G_{2x} = G_{5x} = G_{6x} = 0.$$

Рассмотрим условие (17) для ряда (18).

В этом случае члены ряда с коэффициентами G_{3x} и G_{7x} станут равными 0, так как $\sin n_k y$ при $y = 0$ и $y = d$ равен 0. Чтобы выполнялось условие (17) необходимо выполнение условия

$$G_{4x} = G_{8x} = 0.$$

Следовательно, ряд (18) примет вид

$$A_x = \sum_{h,k,t} G_{3x} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} G_{7x} \sin m_h x \cos n_k y \sin u_t z. \tag{20}$$

Аналогично проанализируем ряд (19).

При применении условий (13) и (16) во всех членах ряда (19) $\cos n_k y$ станут $\sin n_k y$, а $\sin n_k y$ станут $\cos n_k y$. При применении условия (16) при $y = 0$ и $y = d$ члены ряда с коэффициентами G_{1z} , G_{3z} , G_{5z} и G_{7z} станут равными 0, так как $\sin n_k y$ при таких значениях y равен 0.

Для выполнения условия (16) необходимо, чтобы было

$$G_{2z} = G_{4z} = G_{6z} = G_{8z} = 0,$$

так как при $z = 0$ и $z = l$ только члены ряда с коэффициентами G_{5z} и G_{7z} становятся равными 0. Следовательно, ряд (19) примет вид

$$A_z = \sum_{h,k,t} G_{5z} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z + \sum_{h,k,t} G_{7z} \sin m_h x \cos n_k y \sin u_t z. \tag{21}$$



Применим условие (10) к рядам (20) и (21):

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{h,k,t} u_t G_{3x} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} u_t G_{7x} \sin m_h x \cos n_k y \sin u_t z = \\
 & = - \sum_{h,k,t} m_h G_{5z} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z + \sum_{h,k,t} m_h G_{7z} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

При $x=0$ и $x=l$ первые слагаемые слева и справа в выражении (22) станут равными 0, так как в этом случае $\sin m_h x = 0$. Чтобы выполнялось равенство в выражении (22) надо положить

$$G_{7x} = G_{7z} = 0.$$

В этом случае будет выполняться и условие (14) при $z=0$ и $z=l$, так как $\sin u_t z = 0$ будет равен 0.

Отсюда следует, что при выполнении граничных условий ряды (18) и (19) примут вид

$$A_x = \sum_{h,k,t} G_{3x} \sin m_h x \cos n_k y \cos u_t z, \tag{23}$$

$$A_z = \sum_{h,k,t} G_{5z} \cos m_h x \cos n_k y \sin u_t z. \tag{24}$$

Литература:

1. Попов Б.К. Расчёт электромагнитного поля цилиндрической катушки с помощью рядов Фурье / Б.К. Попов, О.Б. Попова // Технические и технологические системы. Материалы VI Международной научной конференции «ТТС-14». Сборник материалов. – Краснодар : КубГАУ, 2014. – 471 с.
2. Попов Б.К. Основные направления в развитии алгоритмов расчёта электрических цепей переменного тока, содержащих нелинейные элементы, также электромагнитного поля электромеханических преобразователей / Б.К. Попов, О.Б. Попова // Технические и технологические системы. Материалы V Международной научной конференции «ТТС-13». Сборник материалов – Краснодар : КубГАУ, 2013. – 315 с.
3. Попов Б.К. Расчёт электромагнитных полей в электромеханических устройствах // Материалы второй межвузовской научной конференции 27–28 марта 2003 года. Т. 1. – Краснодар, 2003.
4. Попов Б.К. Исследование применимости метода вторичных источников при решении краевых задач электромагнитного поля / Деп. в ВИНТИ 11.04.03, № 689 – В2003.
5. Попов Б.К. Расчёт магнитного поля двух шин прямоугольного сечения со встречно направленными токами в кусочно-неоднородной прямоугольной области, окружённой ферромагнетиком с бесконечной магнитной проницаемостью / Деп. в ВИНТИ 02.05.07, № 485 – В2007.
6. Попов Б.К. Расчёт магнитного поля в кусочно-неоднородной прямоугольной области / Б.К. Попов, О.Б. Попова, В.Ю. Карандей // Технические и технологические системы: Т. 38 материалы международной научной конференции. – Краснодар : КубГАУ, 2009. – 433 с.
7. Попов Б.К. Вычисление ряда Фурье проекции векторного магнитного потенциала A на ось X для цилиндрической катушки / Б.К. Попов, О.Б. Попова. – СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015615628, зарегистрировано 21.05.15. – 7 с.
8. Попов Б.К. Вычисление ряда Фурье проекции векторного магнитного потенциала A на ось Z для цилиндрической катушки / Б.К. Попов, О.Б. Попова. – СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015615627, зарегистрировано 21.05.15. – 7 с.
9. Попов Б.К. Вычисление картины поля векторного магнитного потенциала A цилиндрической катушки в плоскости x0. / Б.К. Попов, О.Б. Попова. – СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015615566, зарегистрировано 21.05.15. – 5 с.
10. Попов Б.К. Вычисление картины поля векторного магнитного потенциала A цилиндрической катушки в плоскости z0. / Б.К. Попов, О.Б. Попова. – СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015615567, зарегистрировано 21.05.15. – 5 с.
11. Попов Б.К. Программа построения силовых линий магнитной индукции / Б.К. Попов. – СВИДЕТЕЛЬСТВО об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2011610652, 11.01.11. – 7 с.

References:

1. Popov B.K. Calculation of the electromagnetic field of the cylindrical coil by means of ranks Fourier / B.K. Popov, O.B. Popova // Technical and technological systems. Materials VI of the International scientific TTS-14 conference. Collection of materials. – Krasnodar : KubGAU, 2014. – 471 p.
2. Popov B.K. The main directions in development of algorithms of calculation of the electric chains of alternating current containing nonlinear elements, also electromagnetic field of electromechanical converters / B.K. Popov, O.B. Popova // Technical and technological systems. Materials V of the International scientific TTS-13 conference. The collection of materials – Krasnodar : KubGAU, 2013. – 315 p.



3. Popov B.K. Calculation of electromagnetic fields in electromechanical devices // Materials of the second inter-university scientific conference on March 27-28, 2003. V. 1. – Krasnodar, 2003.
4. Popov B.K. A research of applicability of a method of secondary sources at the solution of regional problems of the electromagnetic field / Depp. in VINITI 11.04.03, № 689 – B2003.
5. Popov B.K. Calculation of magnetic field of two tires of rectangular section with opposite directed currents in the piecewise and non-uniform rectangular area surrounded with a ferromagnetic with infinite magnetic permeability / Depp. in VINITI 02.05.07, № 485 – B2007.
6. Popov B.K. Calculation of magnetic field in piecewise and non-uniform rectangular area / B.K. Popov, O.B. Popova, V.Yu. Karandey // Technical and technological systems: V. 38th materials of the international scientific conference. – Krasnodar : KubGAU, 2009. – 433 p.
7. Popov B.K. Calculation of a number of Fourier of a projection of vector magnetic potential of A to axis X for the cylindrical coil / B.K. Popov, O.B. Popova. – The CERTIFICATE on the state registration of the computer program 2015615628, is registered 21.05.15. – 7 p.
8. Popov B.K. Calculation of a number of Fourier of a projection of vector magnetic potential of A to axis Z for the cylindrical coil / B.K. Popov, O.B. Popova. – The CERTIFICATE on the state registration of the computer program 2015615627, is registered 21.05.15. – 7 p.
9. Popov B.K. Calculation of a picture of the field of vector magnetic potential A cylindrical coils in the x_0 plane. / B.K. Popov, O.B. Popova. – The CERTIFICATE on the state registration of the computer program 2015615566, is registered 21.05.15. – 5 p.
10. Popov B.K. Calculation of a picture of the field of vector magnetic potential A cylindrical coils in the z_0 plane. / B.K. Popov, O.B. Popova. – The CERTIFICATE on the state registration of the computer program 2015615567, is registered 21.05.15. – 5 p.
11. Popov B.K. Program of creation of power lines of magnetic induction / B.K. Popov. – CERTIFICATE on official registration of the computer program № 2011610652, 11.01.11. – 7 p.