



УДК 622.323

ФИЛЬТРАЦИЯ К СКВАЖИНЕ В ГЕТЕРОГЕННОМ ПЛАСТЕ ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТИ

FILTRATION TO A WELL IN A HETEROGENEOUS RESERVOIR DUAL POROSITY

Шарнов Александр Иванович

кандидат технических наук,
доцент кафедры машин и оборудования
нефтяных и газовых промыслов,
Армавирский механико-технологический
институт (филиал),
Кубанский государственный
технологический университет
a.i.sharnov@mail.ru

Sharnov Alexander Ivanovich

Candidate of Technical Sciences,
Associate professor of the Department of ma-
chinery and equipment of oil and gas fields,
Armavir Institute of mechanics
and technology (branch),
Kuban State University of Technology
a.i.sharnov@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются решения задач плоско-радиальной фильтрации однородной жидкости в гетерогенном по проницаемости трещиновато-пористом бесконечном пласте к скважинам с постоянным давлением и дебитом.

Annotation. The article deals with solving the problems of plane-radial filtration of a homogeneous liquid in an inhomogeneous permeability fractured porous endless reservoir to wells with constant pressure and flow rate.

Ключевые слова: фильтрация, скважина, пласт, трещиновато-пористый.

Keywords: filtration, well, formation, fractured-porous.

1 Постановка задачи

Неустановившаяся фильтрация жидкости в среде с двойной пористостью без учета изменения объема пор в одной из сред при изменении давления в другой среде описывается системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\mu} \nabla(k_{ij} \nabla P_1) &= \beta_1^* \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu} (P_2 - P_1); \\ \frac{k_2}{\mu} \Delta P_2 &= \beta_2^* \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu} (P_2 - P_1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где P_1 и P_2 , k_0 и k_2 , $\beta_1^* = \beta_{c1} + m_{10} \beta_{ж}$ и $\beta_2^* = \beta_{c2} + m_{20} \beta_{ж}$ – осредненные в окрестностях данной точки среды давления, проницаемости и упругоэластичности, t – время, μ – вязкость жидкости, α – коэффициент, характеризующий интенсивность обмена жидкостью между средами 1 и 2, k_{ij} – симметричный тензор трещинной проницаемости.

Частным случаем среды с двойной пористостью является трещиновато-пористая среда. Систему уравнений (1.1) для трещиновато-пористой среды можно представить в виде [2]:

$$\begin{aligned} \kappa \nabla(k_{ij} \nabla P_1) + \frac{P_2 - P_1}{\tau} &= 0; \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{P_2 - P_1}{\tau} &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\kappa = \frac{k_0}{\mu \beta_2^*}$, $\tau = \frac{\mu \beta_2^*}{\alpha}$.

Исключив в (1.2) одно из давлений, вместо системы уравнений получаем одно уравнение одинаковое по форме для трещин и блоков:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \nabla(k_{ij} \nabla P) + \eta \frac{\partial \nabla(k_{ij} \nabla P)}{\partial t}, \tag{1.3}$$

где $\eta = \kappa \tau$.



Уравнение (1.3) можно рассматривать как уравнение движения в обычной пористой среде с суммарным коэффициентом сжимаемости $\beta_0 = \beta_{c2} + m_{20}\beta_{ж}$. Коэффициенты κ и η определяются путем лабораторных и промысловых исследований кернов и опытным откачкам при нестационарном режиме [3].

Предположим, что первоначальное давление в пласте мощностью h занимающем пространство $r \geq r_0$ вне совершенной скважины цилиндрической формы радиуса r_0 , постоянно и равно $P_{пл}$, а с момента t_0 скважина начинает работать с постоянным забойным давлением P_3 или постоянным расходом Q .

Поскольку область, в которой исследуется фильтрация, обладает осевой симметрией, то используем цилиндрическую систему координат. Уравнение (1.3) в этом случае записывается в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} k(\bar{r}) \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \right) + k_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right] = \kappa \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} k(\bar{r}) \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \right) + k_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right]. \tag{1.4}$$

Практический интерес представляет случай гетерогенного по проницаемости в радиальном направлении пласта, поскольку в процессе работы скважины призабойная зона может иметь пониженную проницаемость, вследствие различного рода загрязнений. Имеющиеся экспериментальные данные для коэффициента проницаемости могут быть аппроксимированы степенными зависимостями вида:

$$k_r(r) = k_0 \left(\frac{\bar{r}}{r_0} \right)^n. \tag{1.5}$$

Случай $0 < n < 1$ соответствует пластам с пониженной проницаемостью, $n > 1$ – пластам с повышенной проницаемостью, $n = 0$ – пластам с постоянной проницаемостью. Определенным выбором параметров k_0 и n можно добиться согласования проницаемости, вычисленной по формуле (1.5), с имеющимися экспериментальными данными.

В случае работы совершенной скважины течение жидкости можно принять плоскорадиальным в пределах всей мощности пласта h .

Уравнение (1.4) в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{r}^n \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{r}^2} + (1+n)\bar{r}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \right] = \kappa \left[\bar{r}^n \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{r}^2} + (1+n)\bar{r}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \right], \tag{1.6}$$

где $\bar{r}_0 \leq \bar{r} < \infty$, $t > 0$.

Задача решается для давления в блоках $P = P_2$ при начальном условии:

$$P(\bar{r}, 0) = P_{пл} \quad (\bar{r}_0 \leq \bar{r} < \infty). \tag{1.7}$$

В соответствии с условием о работе скважины с постоянным давлением или постоянным расходом на стенке скважины зададим одно из следующих граничных условий:

1) в случае постоянного давления на скважине:

$$P(\bar{r}, t)|_{\bar{r}=\bar{r}_0} = P_3 \left[1 - \exp\left(-\frac{\kappa}{\eta} t\right) \right], \quad (t > 0); \tag{1.8}$$

2) в случае постоянного расхода на скважине:

$$\bar{r}^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_0} = -g \left[1 - \exp\left(-\frac{\kappa}{\eta} t\right) \right], \quad (t > 0), \tag{1.9}$$

где $g = \frac{Q\mu}{2\pi h k_0}$, Q – объемный расход жидкости.

Если пласт неограниченный в горизонтальном направлении, то нужно задать еще условие на бесконечности, которое имеет вид:

$$P(\infty, t) = P_{пл}. \tag{1.10}$$

Для решения задачи целесообразно ввести безразмерные переменные $r = \frac{\bar{r}}{r_0}$, $Fo = \frac{\kappa t}{r_0^2}$,

$\xi = \frac{\eta}{r_0^2}$ и новые неизвестные функции $u(r_0, Fo) = \frac{P - P_{пл}}{P_3 - P_{пл}}$ для первой краевой задачи и

$u(r_0, Fo) = \frac{P - P_{пл}}{g}$ в случае второй краевой задачи.



Тогда краевая задача (1.6)–(1.10) будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial F_0} - \xi \frac{\partial}{\partial F_0} \left[r^n \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (1+n)r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right] = r^n \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (1+n)r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 1 \leq r < \infty, \quad Fo > 0, \quad (1.11)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad (1.12)$$

$$u(\infty, Fo) = 0, \quad Fo > 0, \quad (1.13)$$

$$u(r, Fo)|_{r=1} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\xi} Fo\right), \quad Fo > 0, \quad (1.14)$$

$$r^{n+1} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\xi} Fo\right)\right], \quad Fo > 0. \quad (1.15)$$

2 Скважина с постоянным давлением

Рассмотрим бесконечный гетерогенный пласт мощности h , коэффициент проницаемости которого задан соотношением (1.5). Пласт вскрывается совершенной скважиной конечного радиуса r_0 . В процессе работы на скважине поддерживается постоянное давление P_3 . Тогда задача сводится к решению системы (1.11)–(1.13) для безразмерной функции $u(r, Fo)$ [4, 5].

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по переменной Fo . С этой целью для функции оригинала $u(r, Fo)$ введем функцию изображения $\bar{u}(r, \sigma)$ соотношением:

$$\bar{u}(r, \sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma Fo} u(r, Fo) dFo, \quad (2.1)$$

где $\bar{u}(r, \sigma)$ – функция изображения для функции оригинала $u(r, Fo)$, σ – некоторая комплексная величина. В результате преобразования (2.1) уравнение (1.11) примет вид:

$$r^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + (1+n)r^{n-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \delta^2 \bar{u} = 0, \quad \delta^2 = \frac{\sigma}{1 + \xi \sigma}. \quad (2.2)$$

Граничные условия (1.12), (1.13) перейдут соответственно в условия:

$$\bar{u}(r_0, \sigma) = \frac{1}{\sigma(1 + \xi \sigma)}; \quad (2.3)$$

$$\bar{u}(\infty, \sigma) = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2) является частным случаем уравнения Ломмеля и его решение, удовлетворяющее условию (2.3), имеет вид [6, 7]:

$$\bar{u}(r, \sigma) = Br^{-\frac{n}{2}} K_\gamma \left(\frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{n}} \delta \right), \quad (2.5)$$

где $K_\gamma(x)$ – модифицированные функции Бесселя II рода индекса $\gamma = \frac{n}{n-2}$, $n \neq 2$.

Определяя постоянную B из условия (2.4), получаем решение задачи (2.2)–(2.4) для изображения в виде:

$$\bar{u}(r, \sigma) = \frac{r^{-\frac{n}{2}} K_\gamma \left(\frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{n}} \delta \right)}{\sigma(1 + \xi \sigma) K_\gamma \left(\frac{2}{2-n} \delta \right)}. \quad (2.6)$$

Для нахождения оригинала $u(r, Fo)$ по данному изображению воспользуемся теоремой обращения Фурье, согласно которой:

$$u(r, Fo) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{u}(r, \sigma) \exp(\sigma Fo) d\sigma, \quad (2.7)$$

где γ – любое положительное число.



В результате интегрирования (2.6) получим оригинал функции безразмерного давления в виде:

$$u(r, Fo) = \frac{r^{-\frac{n}{2}} b^2}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{K_\gamma(ix) K_\gamma(-ix_0) - K_\gamma(-ix) K_\gamma(ix)}{K_\gamma(ix_0) K_\gamma(-ix_0) (b^2 - \rho)} e^{\rho Fo} d\rho, \quad (2.8)$$

где $x = \frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{2}} s$, $x_0 = \frac{2}{2-n} r_0^{\frac{2-n}{2}} s$.

Используя известные соотношения [6, 7]:

$$K_\gamma \left(z i^{\pm \frac{1}{2} \pi i} \right) = \mp \frac{\pi}{2} i i^{\pm \frac{1}{2} \pi i} \gamma [J_\gamma(z) \mp i Y_\gamma(z)], \quad (2.9)$$

где $J_\gamma(z)$ и $Y_\gamma(z)$ – функции Бесселя I и II родов, получим окончательно для безразмерного давления формулу:

$$u(r, Fo) = 1 + \frac{r^{-\frac{n}{2}} b^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[J_\gamma(x) Y_\gamma(x_0) - Y_\gamma(x) J_\gamma(x_0)]}{[J_\gamma^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)] (b^2 - \rho)} e^{-\rho Fo} d\rho. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) дает распределение давления в блоках. Используя соотношение давлений в блоках и трещинах:

$$u_1(r, Fo) = u_2(r, Fo) + \xi \frac{\partial u_2(r, Fo)}{\partial Fo}, \quad (2.11)$$

получим соответствующую формулу для распределения давления $u_1(r, Fo)$ в трещинах:

$$u_1(r, Fo) = 1 + \frac{r^{-\frac{n}{2}} b^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[J_\gamma(x) Y_\gamma(x_0) - Y_\gamma(x) J_\gamma(x_0)]}{[J_\gamma^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)] (b^2 - \rho)} e^{-\rho Fo} (1 - \xi \rho) d\rho. \quad (2.12)$$

При $\xi \rightarrow 0$ из формулы (2.10) получим формулу, описывающую распределение давления в неоднородном чисто трещиноватом или пористом пласте при упругом режиме. Ранее этот результат был получен автором в работе [4] для пористой неоднородной среды.

$$u_{пор} = 1 + \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[J_\gamma(\tilde{x}) Y_\gamma(\tilde{x}_0) - Y_\gamma(\tilde{x}) J_\gamma(\tilde{x}_0)]}{[J_\gamma^2(\tilde{x}_0) + Y_\gamma^2(\tilde{x}_0)] \rho} e^{-\rho Fo} d\rho, \quad (2.13)$$

$$\tilde{x} = \frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\rho}, \quad \tilde{x}_0 = \frac{2}{2-n} r_0^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\rho}.$$

Решение (2.10), полученное для трещиновато-пористой среды, положив $\frac{\rho}{(b^2 - \rho) \xi} = u^2$, можно

переписать в виде:

$$u(r, Fo) = 1 + \frac{2r^{-\frac{n}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_\gamma(x) Y_\gamma(x_0) - Y_\gamma(x) J_\gamma(x_0)}{J_\gamma^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)} e^{-\frac{u^2 Fo}{1+u^2 \xi}} \frac{du}{u}. \quad (2.14)$$

Для того, чтобы вместо (2.14) можно было пользоваться формулой (2.13) необходимо выполнение неравенства $\frac{\xi}{Fo} \ll 1$ или, что то же самое:

$$\frac{\eta}{\kappa} t \ll 1. \quad (2.15)$$



Если, напротив, заменить неравенство (2.15) на обратное, то показатель экспоненты мал при всех u и из формулы (2.14) получаем [6]:

$$u(r, Fo) = 1 + \frac{2r^{-\frac{n}{2}} b^2}{\pi} \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{J_\gamma(x)Y_\gamma(x_0) - Y_\gamma(x)J_\gamma(x_0)}{J_\gamma^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)} \cdot \frac{du}{u} = 0. \tag{2.16}$$

Таким образом, при значениях безразмерного параметра Fo больших сравнительно с характерным параметром трещиновато-пористой среды ξ , давление в блоках меняется также, как в обычном пористом пласте. При значениях Fo малых сравнительно с ξ давление в блоках не меняется. Возникающее, таким образом, запаздывание характерно для трещиновато-пористой среды.

В частном случае, когда $n = 2$ ($\gamma = 1/2$), функция Бесселя выражается через элементарные трансцендентные функции и решение поставленной задачи ($\xi = 0$) получается в замкнутом виде.

Действительно, учитывая, что:

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot e^{-z}, \tag{2.17}$$

решение в изображениях для пористой среды имеет вид:

$$\bar{u}(r, \sigma) = \frac{rK_{\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2\sqrt{\sigma}}{2}\right)}{K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\right)} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(r^2-1)\sigma}. \tag{2.18}$$

Оригинал этого изображения находим по таблице изображений [7]:

$$u(r, Fo) = \operatorname{erfc}\left(\frac{r^2-1}{4\sqrt{Fo}}\right). \tag{2.19}$$

По формулам (2.10, 2.12, 2.13) проводились численные расчеты. На рисунках 2.1 и 2.2 приведены кривые распределения давления в зависимости от расстояния r для различных значений Fo и в зависимости от Fo для различных значений r . Здесь выбрана степень неоднородности пласта $n = 4$.

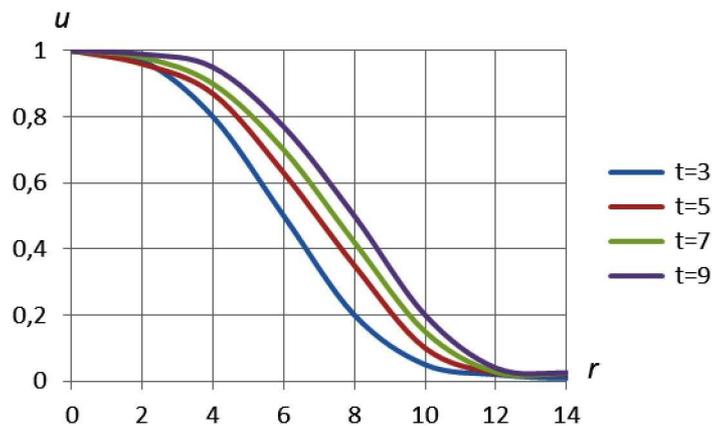


Рисунок 2.1 – Кривые распределения давления в зависимости от расстояния r для различных значений t ($n = 4$)

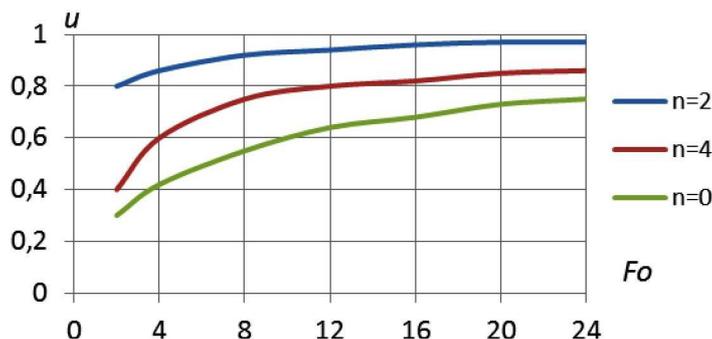


Рисунок 2.2 – Кривые распределения рабочего давления в зависимости от Fo для различных значений r ($n = 4$)



На рисунке 2.3 представлены кривые распределения безразмерного давления $u(r, Fo)$ при работе скважины в неоднородном пласте с коэффициентом пьезопроводности $\kappa = 2 \text{ м}^2/\text{с}$, при показателе неоднородности $n = 4$; 2 в сравнении с распределением полей безразмерного давления в однородном пласте $n = 0$ при условиях $k_0 = 10^3 k_1$, $\kappa_l = 0,002 \text{ м}^2/\text{с}$.

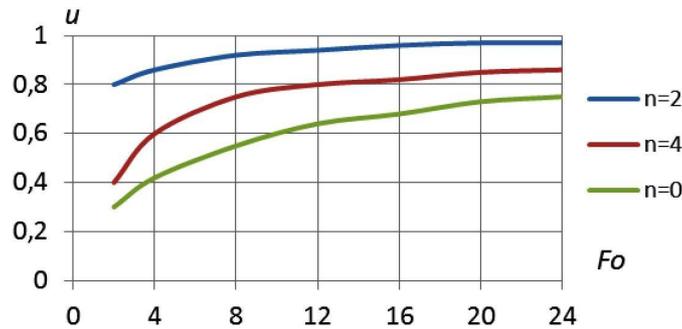


Рисунок 2.3 – Кривые распределения безразмерного давления $u(r, Fo)$ при работе скважины в системы неоднородном ($n = 2$; 4) и однородном ($n = 0$) пластах

Используя асимптотические разложения для модифицированных функций Бесселя II рода, получаем решение для произвольного n в замкнутом виде, которое удобно использовать при практических инженерных расчетах. Так как при больших значениях аргумент z модифицированные функции Бесселя II рода имеют вид:

$$K_\gamma(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot e^{-z}, \tag{2.20}$$

то есть решение в изображениях будет:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2+n}{4}} e^{\frac{2}{2-n} \left(1 - r^{\frac{2-n}{2}}\right)}, \quad \frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\sigma} \gg 1. \tag{2.21}$$

Используя таблицу изображений, находим оригинал:

$$u(r, Fo) = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2+n}{2}} \operatorname{erfc} \left[\frac{r^{\frac{2-n}{2}} - 1}{(2-n)\sqrt{Fo}} \right], \quad \left(\frac{2}{2-n}\right)^2 r^{2-n} \gg Fo. \tag{2.22}$$

Сравнивая результаты расчетов по точной формуле (2.13) и приближенной (2.22), легко дать сравнительную оценку погрешности при использовании (2.22) вместо (2.13) и с определенной степенью точности определить область применимости формулы (2.22). Так, при $n = 4$, $Fo = 20$, $r = 14$ погрешность при использовании (2.22) вместо (2.13) составляет 5 %, а при $r = 17$ использовании (2.22) вместо (2.13) составляет 17 %. На рисунке 2.4 сравниваются графики распределения давления в трещинах и блоках этого же пласта.

Различие, возникающее в начальный момент времени, благодаря мгновенному перераспределению давления в трещинах и медленному изменению его в блоках, ликвидируется тем быстрее, чем меньше характерный параметр ξ трещиноватости или время запаздывания $\tau = \eta/\kappa$. Так, при $\xi = 100$ ($\tau = 5 \text{ с}$) различие между давлением в трещинах и блоках становится несущественным уже при $\xi = 18 \cdot 10^3$.

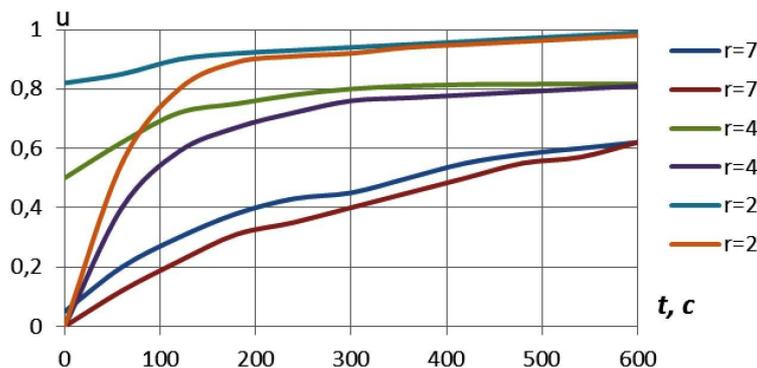


Рисунок 2.4 – Графики распределения давления в трещинах и блоках пласта



Иная картина будет при больших значениях параметра ξ . Так при $\xi = 103$ различие становится несущественным при $\xi = 12 \cdot 104$.

Большой практический интерес при исследовании гидродинамики представляет определение дебита скважины и выявление способов его повышения. Так, например, чем меньше разница давлений на забое и на устье скважины, тем эффективнее работа скважины как основного средства извлечения углеводородов. Максимально уменьшить разницу давлений можно либо путем установки задвижек, либо предельным увеличением дебитов скважин.

Таким образом, с точки зрения, как повышения производительности скважин, так и сокращения непроизводительных потерь энергии пласта в процессе извлечения углеводородов необходимо максимально увеличить дебиты добывающих скважин.

Учитывая, что скорость фильтрации на основе обобщенного закона Дарси определяется по формуле: $v = -\frac{k(r)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}$ дебит скважины можно записать формулой:

$$Q = -2\pi h P_0 \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2.23}$$

в нашем случае для определения дебита Q скважины получаем:

$$Q = \frac{4(2-n)hk_0P_0}{\pi\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2Fo}}{J_\lambda^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)} \cdot \frac{du}{u}. \tag{2.24}$$

Как показали расчеты по формуле (2.24), одним из возможных путей увеличения дебита скважины является увеличение радиуса скважины и повышение проницаемости пласта. Полученные значения расхода позволяют выявить степень усиления потока при увеличении радиуса скважины и проницаемости пласта при заданном давлении нагнетания P_3 .

Так, при степени неоднородности $n = 4$, $\kappa = 2 \text{ м}^2/\text{с}$ изменение радиуса скважины r_0 от 1,5 м. до 2,0 м, ведет к увеличению дебита скважины на 47 %, а увеличение радиуса скважины от 1,5 м до 2,5 м – к увеличению дебита скважины на 98 %.

Аналитические зависимости (2.14), (2.24) для определения полей давления P и дебитов Q нефтяных скважин при заданном давлении нагнетания P_3 дают возможности не только определить влияние радиуса скважины и неоднородности пласта на фильтрацию углеводородов, но и исследовать влияние других природных факторов и технологических параметров, дающих возможность обосновать требования к нефтеносности участка сооружения системы с заданными технологическими показателями.

Для определения дебита скважины в трещиновато-пористом пласте воспользуемся формулой для распределения давления в трещинах P_1 (2.12) и формулой для дебита (2.23). Расход на скважине будет иметь вид:

$$Q = \frac{2(2-n)hk_0P_0b^2}{\pi\mu} \int_0^{b^2} \frac{e^{-\rho Fo(1-\xi\rho)}}{[J_\lambda^2(x_0) + Y_\gamma^2(x_0)] (b^2 - \rho)} \frac{d\rho}{\rho}. \tag{2.25}$$

Как и следовало ожидать, при $\xi \rightarrow 0$ решение (2.25) стремится к соответствующему решению для пористой среды (2.24).

Как показали исследования, неоднородности пласта по проницаемости существенно влияет на основные фильтрационные характеристики потока P , Q . Неучет неоднородности пласта по проницаемости ведет к искажению фильтрационной картины. Поэтому при исследовании процессов фильтрации в областях, где проницаемость намного отличается от естественной, необходим учет гетерогенности пласта. Это особенно относится к исследованию процессов нестационарной фильтрации в прискважинных зонах (с резко выраженной неоднородностью) Учет трещиноватости важен при исследовании процессов фильтрации для времен, сравнимых с характерным временем τ (для Fo сравнимых с ξ).

В предельном случае ($\xi \rightarrow 0$) полученные результаты совпадают с ранее известными: при $n = 0$ получаем распределение давления в однородном трещиновато-пористом пласте, что совпадает с результатами работы [8], при $\xi \rightarrow 0$ и $n = 0$ решение совпадает с результатами работы [3]. Указанные совпадения подтверждают достоверность полученных результатов.

3 Постоянный расход на скважине

В приложениях особое значение имеет задача, в которой на скважине задается не постоянное давление, а постоянный дебит. Решение этой задачи используется в наиболее распространенных способах определения параметров пласта по наблюдениям нестационарного притока к скважине.



Рассмотрим плоскорадиальную фильтрацию жидкости при работе совершенной цилиндрической скважины конечного радиуса в бесконечном горизонтальном неоднородном по проницаемости пласте [9].

До начала работы скважины в пласте устанавливается постоянное давление $P_{пл}$. Скважина начинает работать с постоянным расходом Q , Проницаемость задается формулой (1.5).

При таких условиях для функции $P(r, t)$ необходимо решить задачу (1.6), (1.7), (1.9). Сделав замену $u = (P - P_{пл})/g$ получим задачу с нулевыми условиями на бесконечности, начальными нулевыми условиями и единичным расходом на скважине. Введя безразмерные переменные, получим краевую задачу (1.11)–(1.13), (1.15), которая после применения преобразования Лапласа по переменной F_0 приобретает вид:

$$r^n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + (1+n)r^{n-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \delta^2 \bar{u} = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad \delta^2 = \frac{\sigma}{1 + \xi\sigma}. \tag{3.1}$$

$$\bar{u}(\infty, F_0) = 0, \tag{3.2}$$

$$r^{n+1} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\frac{1}{\sigma(1 + \xi\sigma)}. \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.1) с учетом условия (3.2) имеет вид:

$$\bar{u}(r, \sigma) = Br^{-\frac{n}{2}} K_\gamma \left(\frac{2}{2-n} r^{\frac{2-n}{2}} \delta \right). \tag{3.4}$$

$$K'_\gamma(x) = -K_{\gamma-1}(x) + \frac{\gamma}{x} K_\gamma(x);$$

получаем решение в изображениях:

$$\bar{u}(r, \sigma) = \frac{r^{-\frac{n}{2}} K_\gamma(x \cdot \delta)}{\sigma \delta (1 + \xi\sigma) K_{\gamma-1}(x_0 \cdot \delta)}. \tag{3.5}$$

Для нахождения оригинала $u(r, F_0)$ по найденному изображению (3.5) воспользуемся обращением Фурье:

$$u[r, F_0] = \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{2\sqrt{i}} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{K_\gamma(x \cdot \delta) \exp(\sigma F_0)}{K_{\gamma-1}(x_0 \cdot \delta) \sigma^2 \sqrt{1 + \xi\sigma}} d\sigma. \tag{3.6}$$

Интеграл (3.6) может быть сведен к интегралу по вещественной переменной таким же образом, как это было сделано в пункте 2. Представим формулу (3.5) в виде:

$$\bar{u}(r, \sigma) = \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{\sigma} F(\sigma), \quad F(\sigma) = \frac{K_\gamma(x \cdot \delta)}{K_{\gamma-1}(x_0 \cdot \delta) \sqrt{\sigma(1 + \xi\sigma)}}. \tag{3.7}$$

Оригинал функции $F(\sigma)$ определяем, как в разделе 2, Окончательное решение задачи (1.11)–(1.13), (1.15) получим в виде:

$$u = \frac{r^{-\frac{n}{2}} b^2}{\pi} \int_0^{b^2} \frac{J_\gamma(x \cdot s) Y_{\gamma-1}(x_0 \cdot s) - J_{\gamma-1}(x_0 \cdot s) Y_\gamma(x \cdot s)}{[J_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s) + Y_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s)] \rho \sqrt{\rho(b^2 - \rho)}} (1 - e^{-\rho F_0}) d\rho. \tag{3.8}$$

Из решения (3.8) при $n = 0$ получаем распределение давления в однородном трещиновато-пористом пласте, что хорошо согласуется с результатами работы [4]. При условии $\xi \rightarrow 0$ имеем распределение давления в обычной пористой неоднородной по проницаемости среде, что совпадает с результатами, полученными автором в работе [2]:

$$u = \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_\gamma(x \cdot \rho) Y_{\gamma-1}(x_0 \cdot \rho) - J_{\gamma-1}(x_0 \cdot \rho) Y_\gamma(x \cdot \rho)}{[J_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot \rho) + Y_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot \rho)] \rho \sqrt{\rho}} (1 - e^{-\rho F_0}) d\rho. \tag{3.9}$$



Решение дня трещин с учетом (2.11) на основе формулы (3.8) имеет вид:

$$u_1 = \frac{r^{-n} b^2}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{[J_\gamma(x \cdot s)Y_{\gamma-1}(x_0 \cdot s) - J_{\gamma-1}(x_0 \cdot s)Y_\gamma(x \cdot s)] \cdot [1 - e^{-\rho Fo}(1 - \xi \rho)]}{[J_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s) + Y_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s)] \rho \sqrt{\rho}} d\rho. \tag{3.10}$$

Из формул (3.8) и (3.9), используя известное соотношение для функций Бесселя:

$$J_\gamma(z)Y_{\gamma-1}(z) - Y_\gamma(z)J_{\gamma-1}(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{3.11}$$

получим формулу для определения функции давления на скважине:

$$u(1, Fo) = \frac{2 - n}{\pi^2} \int_0^{\rho} \frac{1 - \exp(-\rho Fo)(1 - \xi \rho)}{[J_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s) + Y_{\gamma-1}^2(x_0 \cdot s)] \rho^2} d\rho. \tag{3.12}$$

По формулам (3.8) и (3.9) были произведены числовые расчеты. На рисунке 3.1 представлен график изменения параметра $u = \frac{P_2 - P_{пл}}{g}$, определяющего безразмерное понижение давления в некоторой точке неоднородного трещиновато-пористого пласта при изменении Fo , а на рисунке 3.2 – при изменении пространственной переменной r , при этом степень неоднородности выбиралась $n = 2$ ($\kappa = 2 \text{ м}^2/\text{с}$).

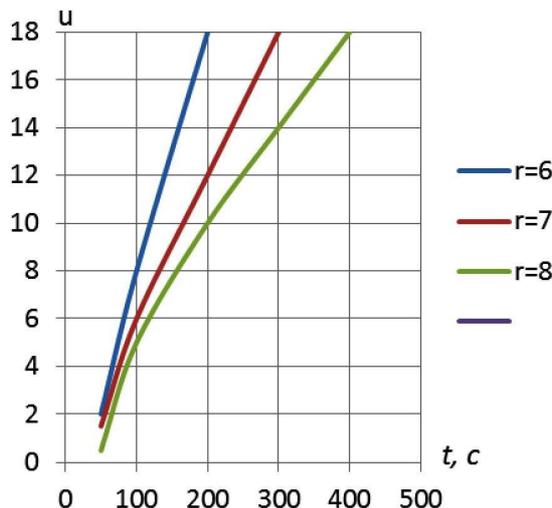


Рисунок 3.1 – График изменения безразмерного понижения давления в некоторой точке трещиновато-пористого пласта при изменении t

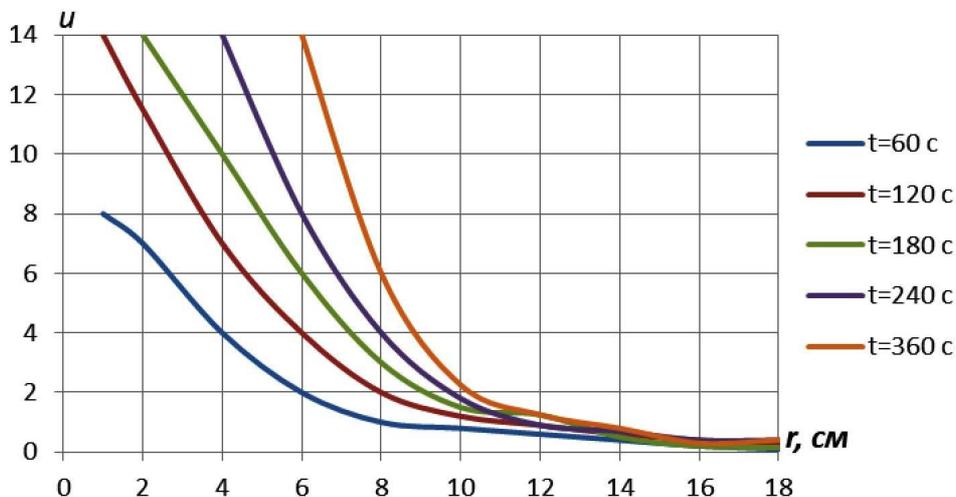


Рисунок 3.2 – Безразмерное понижение давления в некоторой точке трещиновато-пористого пласта при изменении пространственной переменной r ($n = 2$, $\kappa = 2 \text{ м}^2/\text{с}$)



При этом следует отметить, что кривые, описывающие распределение давления в трещиновато-пористом пласте, при уменьшении параметра ξ стремятся к соответствующим кривым, описывающим распределение давления в пористом пласте.

В предельном случае полученные результаты совпадают с ранее известными: при $n = 0$ – с результатами работы [3], при $n = 0$ и $\xi = 0$ – с результатами работы [10], что подтверждает их достоверность.

Литература:

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 852–864.
2. Наказная Л.Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах. – М.: Недра, 1972. – 183 с.
3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М., Недра, 1972. – 288 с.
4. Шарнов А.И. Совершенствование гидродинамических расчетов основных показателей разработки нефтяных пластов с двойной пористостью: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Грозный, 1993.
5. Аладьев А.П., Шарнов А.И. Фильтрация жидкости в неоднородном по проницаемости бесконечном пласте к скважине с постоянным дебитом: в сборнике: Прикладные вопросы точных наук / Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. – 2017. – С. 114–117.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – С. 1108.
8. Антонова А.М., Моисейкина И.И. Некоторые задачи нестационарной фильтрации в неоднородной трещиновато-пористой среде: в сборнике: Современные проблемы и математические методы теории фильтрации / Тезисы докл. Всесоюзного семинара (Москва, 14–17 мая 1984 г.). – М., 1984. – С. 122–123.
9. Рубежанская А.В., Шарнов А.И. Фильтрация жидкости в неоднородном по проницаемости бесконечном пласте с постоянным давлением на скважине: в сборнике: Прикладные вопросы точных наук / Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. – 2017. – С. 117–120.
10. Карслоу Х.С., Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

References:

1. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. About the main submissions of the theory of filtration of uniform liquids in jointed breeds // PMM. – 1960. – Т. 24. – Issue 5. – P. 852–864.
2. Nakaznaya L.G. Filtration of liquid and gas in jointed collectors. – M.: Nedra, 1972. – 183 p.
3. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of non-stationary filtration of liquid and gas. – M., Nedra, 1972. – 288 p.
4. Sharnov A.I. Improvement of hydrodynamic calculations of key indicators of development of oil layers with double porosity: the abstract of the thesis for a degree of Candidate of Technical Sciences. – Grozny, 1993.
5. Aladyev A.P., Sharnov A.I. Filtration of liquid in infinite layer, non-uniform on permeability, to the well with a constant output: in the collection: Applied questions of the exact sciences / Materials I of the International scientific and practical conference of students, graduate students, teachers. – 2017. – P. 114–117.
6. Janke E., Emda F., Lyosh F. Special functions. – M.: Science, 1977. – 344 p.
7. Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, ranks and works. – M.: Science, 1971. – P. 1108.
8. Antonova A.M., Moiseykina I.I. Some problems of non-stationary filtration in the non-uniform jointed and porous environment: in the collection: Modern problems and mathematical methods of the theory filtrations / Theses dokl. All-Union seminar (Moscow, on May 14–17, 1984). – M., 1984. – P. 122–123.
9. Rubezhanskaya A.V., Sharnov A.I. Filtration of liquid in infinite layer, non-uniform on permeability, with constant pressure on the well: in the collection: Applied questions of the exact sciences / Materials I of the International scientific and practical conference of students, graduate students, teachers. – 2017. – P. 117–120.
10. Karslou H.S., Eger D.K. Teploprovodnost of solid bodies. – M.: Science, 1964. – 488 p.